

Trojné integrály

Nech je funkcia troch premenných $f(x, y, z)$ definovaná na trojrozmiernej oblasti $M \subset E_3$

$$M = \{[x, y, z] \in E_3: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq h\}$$

$$M = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle \times \langle e, h \rangle$$

Obdobnou cestou delenia intervalov $\langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle, \langle e, h \rangle$ a postupom ako pri určení dvojného integrálu funkcie dvoch premenných, definujeme integrálny súčet funkcie $f(x, y, z)$ na M .

$$\sum_{i,j,k=1}^{l,m,n} f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \cdot V(M_{ijk})$$

Nech je funkcia f definovaná a ohraničená na oblasti M . Ak pre ľubovoľný výber bodov $[\xi_i, \eta_j, \zeta_k] \in M_{ijk}$ existuje vlastná limita

$$\lim_{\max V(M_{ijk}) \rightarrow 0} \sum_{i,j,k=1}^{l,m,n} f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \cdot V(M_{ijk})$$

nazývame ju trojný integrál funkcie f na oblasti M a označujeme

$$\iiint_M f(x, y, z) dx dy dz$$

Funkciu f nazývame integrovateľnou na oblasti M .

Postačujúcou podmienkou integrovateľnosti f je ohraničenosť na M . Každá spojitá funkcia je integrovateľná na oblasti M .

FUBINIHO veta

Ak je funkcia $f(x, y, z)$ spojitá na oblasti $M = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle \times \langle e, h \rangle$,
potom

$$\begin{aligned} \iiint_M f(x, y, z) dx dy dz &= \int_e^h \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz = \\ &= \int_e^h \left(\int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy \right) dz = \int_e^h \left(\int_a^b \int_c^d f(x, y, z) dy dx \right) dz = \\ &= \int_a^b \left(\int_c^d \int_e^h f(x, y, z) dz dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_e^h \int_a^b f(x, y, z) dx dz \right) dy \end{aligned}$$

Normálna oblasť vzhľadom na rovinu xy

Nech sú funkcie $z_1(x, y) \leq z_2(x, y)$

spojité a ohraničené na elementárnej oblasti

$$M = \{[x, y] \in E_2: a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

alebo

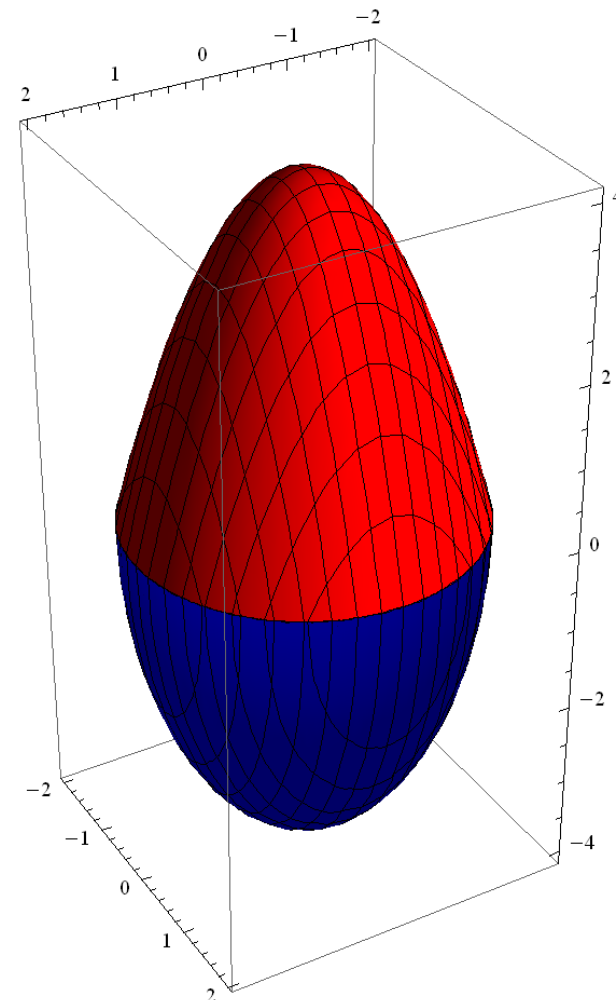
$$M' = \{[x, y] \in E_2: h_1(y) \leq x \leq h_2(y), c \leq y \leq d\}$$

Množina bodov

$$D = \{[x, y, z] \in E_3: [x, y] \in M, z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$$

$$D' = \{[x, y, z] \in E_3: [x, y] \in M', z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$$

je normálna oblasť v E_3 vzhľadom na rovinu xy



FUBINIHO veta

Ak je funkcia $f(x, y, z)$ spojitá na normálnej oblasti D , potom

$$\begin{aligned} \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz &= \iint_M \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz dx dy = \\ &= \int_a^b \left\{ \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \left[\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dy \right\} dx \end{aligned}$$

Ak je funkcia $f(x, y, z)$ spojitá na elementárnej oblasti D' , potom

$$\begin{aligned}\iiint_{D'} f(x, y, z) dx dy dz &= \iint_{M'} \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz dx dy = \\ &= \int_c^d \left\{ \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \left[\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx \right\} dy\end{aligned}$$

Všetky vlastnosti dvojného integrál na oblasti $\langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$, alebo na na elementárnej oblasti M , analogicky platia aj pre trojný integrál na oblasti $\langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle \times \langle e, h \rangle$, alebo na normálnej oblasti D , prípadne na množine, ktorá je zjednotením konečného počtu elementárnych oblastí.

1- Lineárnosť

2- Aditívnosť

3- Monotónnosť

4- Pozitívnosť

5-
$$\left| \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz \right| \leq \iiint_D |f(x, y, z)| dx dy dz$$