

Množné integrály

Množný integrál funkcie $f(X)$ viac premenných na ľubovoľnej merateľnej uzavretej oblasti $G \subset E_n, n \geq 1$.

Oblasť G rozdelíme na čiastkové deliace merateľné oblasti ΔG_i .

Označme $\mu(\Delta G_i)$ mieru týchto oblastí.

Ak pre každú postupnosť integrálnych súčtov funkcie $f(X)$ na G

$$\sum_{i=1}^n f(X_i) \cdot \mu(\Delta G_i)$$

existuje jediná konečná limita, potom toto číslo nazývame množný integrál funkcie f na oblasti G a označujeme

$$I = \int_G f(X) dX$$

Funkciu $f(X)$ nazývame integrovateľnou na merateľnej uzavretej oblasti $G \subset E_n$.

Ak je funkcia f integrovateľná na merateľnej uzavretej oblasti $G \subset E_n$, tak je na tejto oblasti ohraničená.

Ak je funkcia f spojitá (až na konečný počet bodov) na merateľnej uzavretej oblasti $G \subset E_n$, potom je na tejto oblasti integrovateľná.

Vlastnosti množných integrálov

1. Lineárnosť

Ak sú funkcie $f_1, f_2, \dots, f_k$ integrovateľné na oblasti G
a $c_1, c_2, \dots, c_k$ sú reálne čísla, potom

$$\begin{aligned} \int_G (c_1 f_1(X) + c_2 f_2(X) + \dots + c_k f_k(X)) dX &= \\ &= c_1 \int_G f_1(X) dX + c_2 \int_G f_2(X) dX + \dots + c_k \int_G f_k(X) dX \end{aligned}$$

2. Aditívnosť

Ak je funkcia f integrovateľná na oblasti G a nech

$$G = \bigcup_{i=1}^k G_i$$

kde G_i sú merateľné oblasti, ktoré nemajú žiadne spoločné vnútorné body.

Potom

$$\int_G f(X) dX = \sum_{i=1}^k \int_{G_i} f(X) dX$$

3. Monotónnosť

Ak sú funkcie f, g integrovateľné na oblasti G

a $\forall X \in G$ platí $f(X) \leq g(X)$, potom

$$\int_G f(X) dX \leq \int_G g(X) dX$$

4. Ak je funkcia f integrovateľná na merateľnej oblasti G

a $f(X) \geq 0$ pre všetky $X \in G$, tak platí

$$\int_G f(X) dX \geq 0$$

5. Ak je funkcia f integrovateľná na merateľnej oblasti G ,
tak je na G integrovateľná aj funkcia $|f(X)|$ a platí

$$\left| \int_G f(X) dX \right| \leq \int_G |f(X)| dX$$