

Dvojn  integrály

Nech je f funkcia dvoch premenných definovaná na oblasti $M \subset E_2$

$$M = \{[x, y] \in E_2: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle.$$

Graf funkcie je plocha $G(f)$ v E_3 nad množinou M , $f(x, y) \geq 0$.

Zovšeobecnený kváder je teleso v E_3

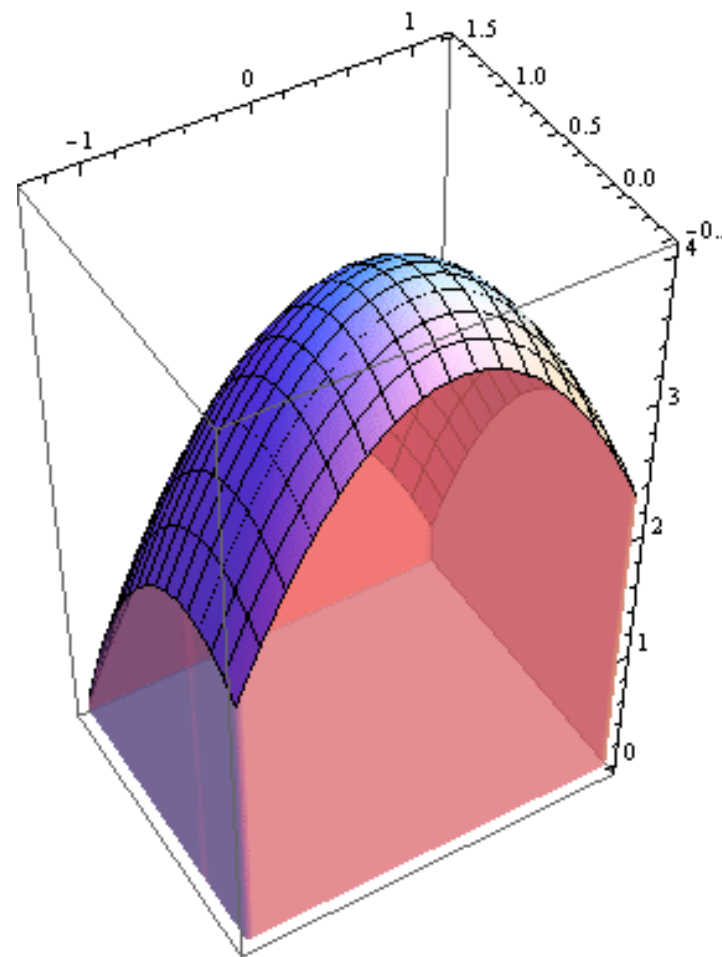
ohraničené rovinami s rovnicami

$$z = 0, x = a, x = b, y = c, y = d$$

a plochou určenou rovnicou

$$z = f(x, y).$$

Objem telesa $V = ?$



$$T = \{[x, y, z] \in E_3 : [x, y] \in M, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

delenie intervalu $\langle a, b \rangle$ - $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k = b$

delenie intervalu $\langle c, d \rangle$ - $c = y_0 < y_1 < \dots < y_{l-1} < y_l = d$

delenie oblasti M - $M_{ij} = \langle x_{i-1}, x_i \rangle \times \langle y_{j-1}, y_j \rangle, i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, l$

$$M = \bigcup_{i,j=1}^{k,l} M_{ij} \Leftrightarrow P(M) = \sum_{i,j=1}^{k,l} P(M_{ij})$$

delenie telesa T na $n = k \cdot l$ deliacich „kvádrov“

$$[\xi_i, \eta_j] \in M_{ij} \Rightarrow f(\xi_i, \eta_j) \Rightarrow f(\xi_i, \eta_j) \cdot P(M_{ij}) \Rightarrow \sum_{i,j=1}^{k,l} f(\xi_i, \eta_j) \cdot P(M_{ij})$$

integrálny súčet funkcie $f(x, y)$ na obdĺžnikovej oblasti M

Nech je funkcia f definovaná a ohraničená na oblasti M . Ak pre ľubovoľný výber bodov $[\xi_i, \eta_j] \in M_{ij}$ existuje tá istá vlastná limita

$$\lim_{\max P(M_{ij}) \rightarrow 0} \sum_{i,j=1}^{k,l} f(\xi_i, \eta_j) \cdot P(M_{ij})$$

nazývame ju dvojný integrál funkcie f na oblasti M a označujeme

$$\iint_M f(x, y) dx dy$$

Funkciu f nazývame integrovateľnou na oblasti M .

Geometrická interpretácia dvojného integrálu funkcie $f(x, y) \geq 0$ na oblasti M je objem zovšeobecneného kvádra T .

Postačujúca podmienka integrovateľnosti

Ak je funkcia f dvoch premenných ohraničená na oblasti M a má na tejto oblasti iba konečný počet bodov nespojitosti, potom je f na M integrovateľná.

Dôsledok

Každá funkcia $f(x, y)$ spojitá na oblasti M je na tejto oblasti integrovateľná.

FUBINIHO veta

Ak je funkcia $f(x, y)$ spojitá na oblasti $M = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$, potom

$$\begin{aligned} \iint_M f(x, y) dx dy &= \\ &= \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \\ &= \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx \end{aligned}$$

Vlastnosti dvojných integrálov

1. Lineárnosť

Ak sú funkcie $f_1, f_2, \dots, f_k$ integrovateľné na oblasti M a $c_1, c_2, \dots, c_k$ sú reálne čísla, potom

$$\begin{aligned} \iint_M (c_1 f_1(x, y) + c_2 f_2(x, y) + \dots + c_k f_k(x, y)) dx dy &= \\ &= c_1 \iint_M f_1(x, y) dx dy + c_2 \iint_M f_2(x, y) dx dy + \dots + c_k \iint_M f_k(x, y) dx dy \end{aligned}$$

2. Aditívnosť

Ak je funkcia f integrovateľná na oblasti M , pričom táto je zjednotením konečného počtu merateľných oblastí M_i , ktoré nemajú žiadne spoločné vnútorné body, potom

$$M = \bigcup_{i=1}^k M_i \quad \iint_M f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^k \iint_{M_i} f(x, y) dx dy$$

3. Monotónnosť

Ak sú funkcie f, g integrovateľné na oblasti M
a $\forall X = [x, y] \in M$ platí $f(x, y) \leq g(x, y)$, potom

$$\iint_M f(x, y) dx dy \leq \iint_M g(x, y) dx dy$$

4. Ak je funkcia f integrovateľná na merateľnej oblasti M
a $f(x, y) \geq 0$ pre všetky $X = [x, y] \in M$, tak platí

$$\iint_M f(x, y) dx dy \geq 0$$

5. Ak je funkcia f integrovateľná na merateľnej oblasti M ,
tak je na M integrovateľná aj funkcia $|f|$ a platí

$$\left| \iint_M f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_M |f(x, y)| dx dy$$

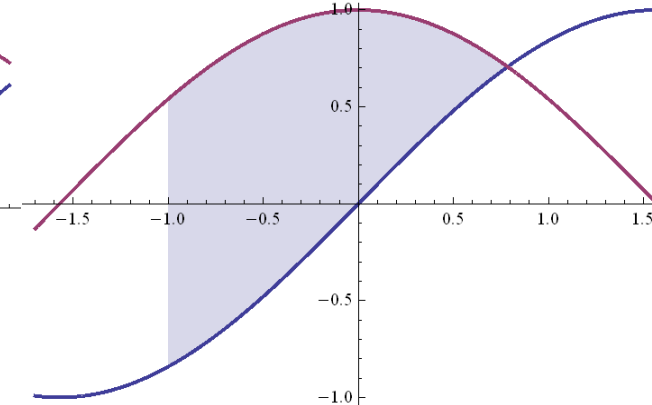
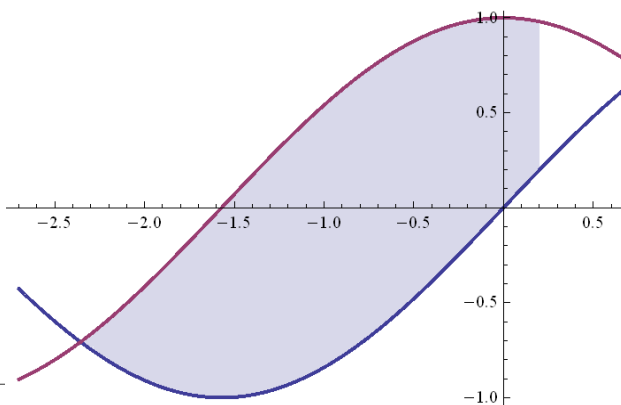
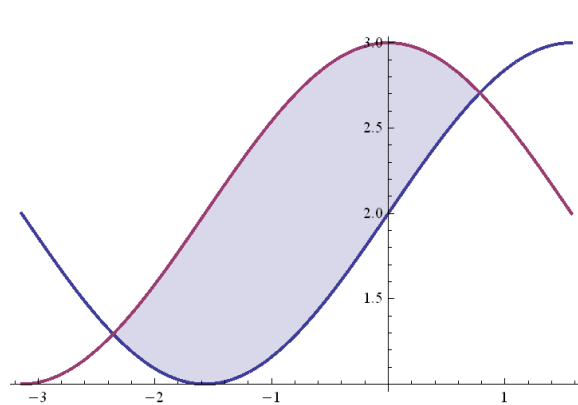
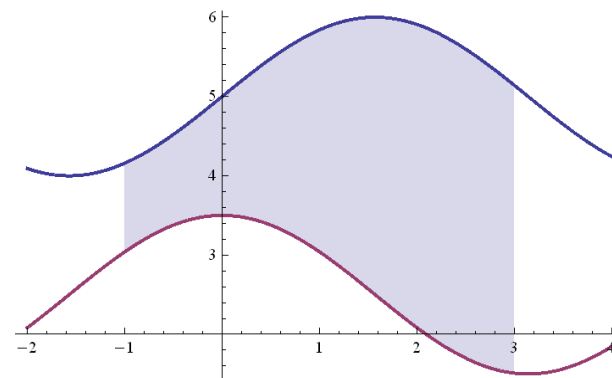
Množina $M = \{[x, y] \in E_2: a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$

kde $a, b \in R, a < b$,

funkcie g a h sú spojité na intervale $\langle a, b \rangle$,

a pre každé $x \in \langle a, b \rangle$ platí $g(x) \leq h(x)$,

sa nazýva elementárna oblasť typu xy



**Množina $M = \{[x, y] \in E_2: g(y) \leq x \leq h(y), c \leq y \leq d\}$, $c, d \in R, c < d$,
funkcie g a h sú spojité na intervale $\langle c, d \rangle$, a pre každé $y \in \langle c, d \rangle$ platí
 $g(y) \leq h(y)$, sa nazýva elementárna oblasť typu yx .**

**Dvojný integrál funkcie f dvoch premenných na elementárnej
oblasti M definujeme podobne, ako na oblasti $\langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$.**

Ak existuje dvojný integrál na elementárnej oblasti M

$$\iint_M f(x, y) dx dy$$

potom funkciu f nazývame integrovateľnou na M .

Všetky vlastnosti dvojného integrálu na oblasti $\langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$ analogicky platia aj pre dvojný integrál na elementárnej oblasti M , prípadne na množine, ktorá je zjednotením konečného počtu elementárnych oblastí.

1- Lineárnosť

2- Aditívnosť

3- Monotónnosť

4- Pozitívnosť

5-
$$\left| \iint_M f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_M |f(x, y)| dx dy$$

FUBINIHO veta

Ak je funkcia $f(x, y)$ spojitá na elementárnej oblasti

$M = \{[x, y] \in E_2: a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$ typu xy , potom

$$\iint_M f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

Ak je funkcia $f(x, y)$ spojitá na elementárnej oblasti

$M = \{[x, y] \in E_2: g(y) \leq x \leq h(y), c \leq y \leq d\}$

$$\iint_M f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y) dx \right) dy$$