

Taylorove rady

Nech má funkcia f na intervale $J = (a - c, a + c)$ derivácie až do rádu $n + 1$.
Pre každé $x \in J$ potom existuje také ξ ležiace medzi x a a , že platí

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Polynóm n -tého stupňa

$$T_n(f, a, x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

nazývame n -tý Taylorov polynóm funkcie f so stredom v bode a ,
výraz

$$R_n(f, a, x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

nazývame zvyšok po n -tom Taylorovom polynóme.

Platí

$$f(a) = T_n(f, a, a)$$

Hodnota funkcie f v bode a sa rovná hodnote Taylorovho polynómu $T_n(f, a, x)$ v bode a .

$$T'_n(f, a, a) = f'(a), \dots, T_n^{(n)}(f, a, a) = f^{(n)}(a)$$

Hodnota derivácií funkcie f v bode a až do rádu n sa rovná hodnotám príslušných derivácií Taylorovho polynómu $T_n(f, a, x)$ v bode a .

S rastúcim n klesá hodnota zvyšku $R_n(f, a, x)$.

Ak má funkcia f v bode a derivácie všetkých rádov, môžeme zostrojiť mocninový rad so stredom v bode a (zovšeobecnenie Taylorovho polynómu)

Taylorov rad funkcie f v bode a $T(f, a, x)$

$$T(f, a, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \dots$$

Pre $a = 0$ sa rad nazýva **Maclaurinov rad**.

Súčtom Taylorovho radu $T_n(f, a, x)$ nemusí byť vždy nutne funkcia f , väčšinou však tomu tak je.

Existujú funkcie, ktorých Taylorov rad konverguje, nie však k týmto funkciám.

Nutná a postačujúca podmienka k tomu, by funkcia bola súčtom svojho Taylorovho radu

Nech má funkcia f na intervale $J = (a - c, a + c)$ derivácie všetkých rádov. Potom pre každé $x \in J$ platí

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots$$

vtedy a len vtedy, ak $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(f, a, x) = 0$.

Nech má funkcia f na intervale $J = (a - c, a + c)$ derivácie všetkých rádov. Ak existuje taká konštanta $K > 0$, že platí

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in J : |f^{(n)}(x)| < K$$

potom pre každé $x \in J$ platí

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots$$

Ak je funkcia f na istom intervale súčtom svojho Taylorovho radu, hovoríme, že ju možno na tomto intervale rozvinúť do mocninového radu a tento rad nazývame (nekonečným) rozvojom funkcie f .

Rozvoj funkcie do mocninového radu so stredom v bode a je jediný, a vždy sa jedná o Taylorov rad danej funkcie so stredom v bode a .

$$\sin x = T(\sin x, 0, x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, x \in (-\infty, \infty)$$

$$\cos x = T(\cos x, 0, x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, x \in (-\infty, \infty)$$

$$e^x = T(e^x, 0, x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, x \in (-\infty, \infty)$$

$$\ln(x+1) = T(\ln(x+1), 0, x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots, x \in (-1, 1)$$

$$\arctan x = T(\arctan x, 0, x) = x - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, x \in \langle -1, 1 \rangle$$

$$(x+1)^p = T((x+1)^p, 0, x) = 1 + \binom{p}{1}x + \dots + \binom{p}{n}x^n + \dots, x \in (-1, 1)$$