

Funkcionálne rady

Postupnosť, ktorej všetky členy sú funkcie, sa nazýva funkcionálna postupnosť

$$\{f_n\} = \{f_n(x)\} = f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$$

Ak sú všetky funkcie postupnosti $\{f_n\}$ definované v nejakom bode (čísle) x_0 , potom môžeme hovoriť o konvergencii (divergencii) danej funkcionálnej postupnosti $\{f_n\}$ v bode x_0 .

Ak postupnosť $\{f_n\}$ konverguje (diverguje) v každom bode istej množiny M , potom hovoríme, že konverguje (diverguje) na množine M .

Množinu všetkých bodov, v ktorých postupnosť $\{f_n\}$ konverguje, nazývame **oborom konvergence** postupnosti $\{f_n\}$.

Ak postupnosť $\{f_n\}$ konverguje na M , potom je na M definovaná funkcia

$$f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0), \forall x_0 \in M$$

ktorú nazývame limita postupnosti na M , zapisujeme

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$$

Platí

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \text{ na } M \Leftrightarrow \forall x_0 \in M, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : \forall n \in N, n > n_0 \Rightarrow |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Funkcia f nemusí byť spojitá, ak je spojitá, hovoríme o rovnomernej konvergencii funkcionálnej postupnosti.

Funkcionálny rad

Nech sú všetky členy funkcionálnej postupnosti $\{f_n\}$ definované na neprázdnej množine M . Výraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f_1 + f_2 + \dots + f_n + \dots$$

nazývame funkcionálny rad.

Nech

$$s_n = \sum_{i=1}^n f_i = f_1 + f_2 + \dots + f_n, n = 1, 2, \dots$$

Funkciu s_n nazývame n -tý čiastočný súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$

Funkcionálny rad sa nazýva konvergentný (divergentný) na množine M , ak postupnosť jeho čiastočných súčtov $\{s_n\}$ konverguje (diverguje) na M .

Obor konvergenzie funkcionálneho radu je obor konvergenzie funkcionálnej postupnosti $\{s_n\}$ - označujeme OK .

Ak existuje limita
$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

na množine M , potom funkciu s nazývame súčet radu na M

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = s, \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = s(x)$$

Ak je $x_0 \in OK$, potom je číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ konvergentný a jeho súčet je

hodnota funkcie s v bode x_0 ,
$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) = s(x_0).$$

Úlohy- nájsť obor konvergenzie funkcionálneho radu a jeho súčet.

Weierstrassovo kritérium

Ak je číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentný a pre všetky členy radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ platí

$$|f_n(x)| \leq a_n, \forall x \in M,$$

potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje na množine M .

Mocninové rady

Funkcionálny rad tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + \dots$$

sa nazýva mocninový rad so stredom v bode a . Čísla a_n sa nazývajú koeficienty radu.

Pre $a = 0$ dostávame

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots$$

Mocninový rad je isté zovšeobecnenie polynómu, má aj určité podobné vlastnosti. Mocninový rad je jednoznačne určený svojimi koeficientmi a stredom.

Oborom konvergenzie mocninového radu je interval, alebo jednobodová množina.

Pre každý mocninový rad existuje číslo $R \geq 0$ (pripúšťa sa aj $R = \infty$) také, že daný rad konverguje absolútne v každom bode $x \in (a - R, a + R)$ a diverguje v každom bode $x \notin (a - R, a + R)$.

R sa nazýva **polomer konvergenzie** a interval $IK = (a - R, a + R)$ **interval konvergenzie** mocninového radu.

Ak rad konverguje iba vo svojom strede, $R = 0$, $IK = \{a\}$.

Ak $R = \infty$, rad konverguje na celej množine reálnych čísel, $IK = (-\infty, \infty)$.

Mocninový rad môže konvergovať aj v hraničných bodoch intervalu IK .

Nech je daný mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$, pričom jeho koeficienty sú také, že existuje limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$$

alebo limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$$

pričom $\rho \in (0, \infty)$.

Polomer konvergenzie mocninového radu sa potom rovná $R = \frac{1}{\rho}$.

Ak je $\rho = 0$, polomer konvergenzie je $R = \infty$,

ak je $\rho = \infty$, polomer konvergenzie je $R = 0$.

Nech $R > 0$ je polomer konvergenzie mocninového radu so stredom a , nech $s(x)$ je súčet radu, $IK = (a - R, a + R)$ je obor konvergenzie radu. Potom platí

- funkcia $s(x)$ je spojitá na IK
- ak $\langle b, c \rangle \subset IK$, potom existuje

$$\int_b^c s(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_b^c a_n (x - a)^n dx$$

ktorý dostaneme integrovaním mocninového radu člen po člene

- funkcia $s(x)$ má na IK primitívnu funkciu, ktorú dostaneme integrovaním mocninového radu člen po člene
- funkcia $s(x)$ má na IK deriváciu, ktorú dostaneme derivovaním mocninového radu člen po člene
- integrovaním a derivovaním mocninového radu sa obor konvergenzie nezmení.

Taylorove rady

Nech má funkcia f na intervale $J = (a - c, a + c)$ derivácie až do rádu $n + 1$.

Pre každé $x \in J$ potom existuje také ξ ležiace medzi x a a , že platí

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Polynóm n -tého stupňa

$$T_n(f, a, x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

nazývame n -tý Taylorov polynóm funkcie f so stredom v bode a ,
výraz

$$R_n(f, a, x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

nazývame zvyšok po n -tom Taylorovom polynóme.

Platí

$$f(a) = T_n(f, a, a)$$

Hodnota funkcie f v bode a sa rovná hodnote Taylorovho polynómu $T_n(f, a, x)$ v bode a .

$$T'_n(f, a, a) = f'(a), \dots, T_n^{(n)}(f, a, a) = f^{(n)}(a)$$

Hodnota derivácií funkcie f v bode a až do rádu n sa rovná hodnotám príslušných derivácií Taylorovho polynómu $T_n(f, a, x)$ v bode a .

S rastúcim n klesá hodnota zvyšku $R_n(f, a, x)$.

Ak má funkcia f v bode a derivácie všetkých rádov, môžeme zostrojiť mocninový rad so stredom v bode a (zovšeobecnenie Taylorovho polynómu)

Taylorov rad funkcie f v bode a $T(f, a, x)$

$$T(f, a, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \dots$$

Pre $a = 0$ sa rad nazýva **Maclaurinov rad**.

Súčtom Taylorovho radu $T_n(f, a, x)$ nemusí byť vždy nutne funkcia f , väčšinou však tomu tak je.

Existujú funkcie, ktorých Taylorov rad konverguje, nie však k týmto funkciám.

Nutná a postačujúca podmienka k tomu, by funkcia bola súčtom svojho Taylorovho radu

Nech má funkcia f na intervale $J = (a - c, a + c)$ derivácie všetkých rádov.

Potom pre každé $x \in J$ platí

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots$$

vtedy a len vtedy, ak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(f, a, x) = 0.$$

Postačujúca podmienka k tomu, by funkcia bola súčtom svojho Taylorovho radu

Nech má funkcia f na intervale $J = (a - c, a + c)$ derivácie všetkých rádov. Ak existuje taká konštanta $K > 0$, že platí

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in J : \left| f^{(n)}(x) \right| < K$$

potom pre každé $x \in J$ platí

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots$$

Ak je funkcia f na istom intervale súčtom svojho Taylorovho radu, hovoríme, že ju možno na tomto intervale rozvinúť do mocninového radu a tento rad nazývame (nekonečným) rozvojom funkcie f .

Rozvoj funkcie do mocninového radu so stredom v bode a je jediný, a vždy sa jedná o Taylorov rad danej funkcie so stredom v bode a .

$$\sin x = T(\sin x, 0, x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, x \in (-\infty, \infty)$$

$$\cos x = T(\cos x, 0, x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, x \in (-\infty, \infty)$$

$$e^x = T(e^x, 0, x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, x \in (-\infty, \infty)$$

$$\ln(x+1) = T(\ln(x+1), 0, x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots, x \in (-1, 1)$$

$$\arctan x = T(\arctan x, 0, x) = x - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, x \in \langle -1, 1 \rangle$$

$$(x+1)^p = T((x+1)^p, 0, x) = 1 + \binom{p}{1}x + \dots + \binom{p}{n}x^n + \dots, x \in (-1, 1)$$