

Mocninové rady

Funkcionálny rad tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + \dots$$

sa nazýva mocninový rad so stredom v bode a . Čísla a_n sa nazývajú koeficienty radu. Mocninový rad je jednoznačne určený svojimi koeficientmi a stredom.

Pre $a = 0$ dostávame mocninový rad v jednoduchom tvare

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots$$

Mocninový rad je isté zovšeobecnenie polynómu, má aj určité podobné vlastnosti.

Oborom konvergenzie mocninového radu je interval, alebo jednobodová množina.

Pre každý mocninový rad existuje číslo $R \geq 0$
(pripúšťame aj $R = \infty$) také, že daný rad
konverguje absolútne v každom bode $x \in (a - R, a + R)$
a diverguje v každom bode $x \notin (a - R, a + R)$.

R sa nazýva **polomer konvergencie**
interval $IK = (a - R, a + R)$ nazývame **interval konvergencie**
mocninového radu.

Polomer konvergencie mocninového radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n$

$R \geq 0$, vyjadríme ako $R = 1/\rho$, kde $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ alebo $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

Mocninový rad môže konvergovať aj v hraničných bodoch intervalu IK ,
v ktorých vyšetrujeme konvergenciu číselných radov

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (a - R)^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (a + R)^n$$

Obor konvergenzie mocninového radu je množina všetkých bodov x ,
v ktorých príslušný číselný rad konverguje.

Ak $\rho = 0$, potom $R = \infty$

a rad konverguje na celej množine reálnych čísel, $IK = (-\infty, \infty)$.

Ak $\rho = \infty$, potom $R = 0$

a rad konverguje iba vo svojom strede, $IK = \{a\}$.

Nech $R > 0$ je polomer konvergenzie mocninového radu so stredom a , $s(x)$ je súčet radu, $IK = (a - R, a + R)$ je obor konvergenzie radu. Potom platí

- funkcia $s(x)$ je spojitá na IK

- ak $\langle b, c \rangle \subset IK$, potom existuje integrál
$$\int_b^c s(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_b^c a_n (x - a)^n dx$$

ktorý dostaneme integrovaním mocninového radu člen po člene

- funkcia $s(x)$ má na IK primitívnu funkciu, ktorú dostaneme integrovaním mocninového radu člen po člene
- funkcia $s(x)$ má na IK deriváciu, ktorú dostaneme derivovaním

mocninového radu člen po člene
$$s'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n (x - a)^{n-1}$$

- integrovaním a derivovaním mocninového radu sa obor konvergenzie nezmení.