

Parciálne derivácie vyšších rádov funkcie dvoch premenných

Parciálne derivácie parciálnych derivácií funkcie dvoch premenných $f(x, y)$ sa nazývajú druhé parciálne derivácie, alebo parciálne derivácie druhého rádu.

$$f''_{xx} = [f'_x]'_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad f''_{xy} = [f'_x]'_y = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$f''_{yx} = [f'_y]'_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad f''_{yy} = [f'_y]'_y = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Ak sú parciálne derivácie druhého rádu funkcie f spojité, potom

$$f''_{xy} = f''_{yx}.$$

Funkcia f , ktorá má n premenných, môže mať spolu n^2 parciálnych derivácií druhého rádu.

Pre $n = 2$ je teda počet parciálnych derivácií druhého rádu $2^2 = 4$.

Parciálne derivácie parciálnych derivácií druhého rádu sa nazývajú tretie parciálne derivácie, alebo parciálne derivácie tretieho rádu.

$$f'''_{xxx} = [f''_{xx}]'_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \quad f'''_{xxy} = [f''_{xx}]'_y = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$$

$$f'''_{xyx} = [f''_{xy}]'_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} \quad f'''_{xyy} = [f''_{xy}]'_y = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial y}$$

$$f'''_{yxx} = [f''_{yx}]'_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial x} \quad f'''_{yxy} = [f''_{yx}]'_y = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}$$

$$f'''_{yyx} = [f''_{yy}]'_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} \quad f'''_{yyy} = [f''_{yy}]'_y = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$$

Počet parciálnych derivácií funkcie dvoch premenných tretieho rádu je $2^2 \times 2 = 2^3 = 8$.

Parciálne derivácie parciálnych derivácií $(n-1)$ -vého rádu sa nazývajú n -té parciálne derivácie, alebo parciálne derivácie n -tého rádu.

$$\begin{aligned}
 f_{\underbrace{xx\dots x}_n}^{(n)} &= [f_{\underbrace{xx\dots x}_{n-1}}^{(n-1)}]'_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}} \right) = \frac{\partial^n f}{\partial x^n} & f_{\underbrace{xx\dots xy}_{n-1}}^{(n)} &= [f_{\underbrace{xx\dots x}_{n-1}}^{(n-1)}]'_y = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^{(n-1)} f}{\partial x^{n-1}} \right) = \frac{\partial^{(n)} f}{\partial x^{n-1} \partial y} \\
 f_{\underbrace{xx\dots xyx}_{n-2}}^n &= [f_{\underbrace{xx\dots xy}_{n-2}}^{(n-1)}]'_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-2} \partial y} \right) = \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-2} \partial y \partial x} & f_{\underbrace{xx\dots xyy}_{n-2}}^n &= [f_{\underbrace{xx\dots xy}_{n-2}}^{(n-1)}]'_y = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-2} \partial y} \right) = \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-2} \partial y^2} \\
 &\dots \\
 f_{\underbrace{yy\dots yx}_{n-1}}^n &= [f_{\underbrace{yy\dots y}_{n-1}}^{(n-1)}]'_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial y^{n-1}} \right) = \frac{\partial^n f}{\partial y^{n-1} \partial x} & f_{\underbrace{yy\dots y}_n}^n &= [f_{\underbrace{yy\dots y}_{n-1}}^{(n-1)}]'_y = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial y^{n-1}} \right) = \frac{\partial^n f}{\partial y^n}
 \end{aligned}$$

Počet parciálnych derivácií funkcie dvoch premenných n -tého rádu je $2^{n-1} \times 2 = 2^n$.

Pomocou parciálnych derivácií vyšších rádov a ich vlastností určujeme kritické body z oboru definície $D(f)$ funkcie viac premenných a existenciu lokálnych extrémov funkcie v týchto bodoch, prípadne špeciálne body grafu funkcie - napr. sedlový bod.