

Parciálne derivácie funkcie dvoch premenných

Nech $z = f(x, y)$ je funkcia dvoch premenných definovaná v istom okolí bodu $A = [x_0, y_0]$, ktorý je hromadným bodom jej oboru definície $D(f)$.

Definujme množinu

$$M_x = \{x \in R : [x, y_0] \in D(f)\} \subset E_1$$

a funkciu

$$g : M_x \rightarrow R \quad \forall x \in M_x \quad g(x) = f(x, y_0)$$

Ak má funkcia $g(x)$ v bode x_0 deriváciu $g'(x_0)$, túto nazývame parciálna derivácia funkcie $f(x, y)$ v bode $A = [x_0, y_0]$ a označujeme

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_x(A) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(A)$$

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

Obdobne definujeme množinu

$$M_y = \{y \in R : [x_0, y] \in D(f)\} \subset E_1$$

a funkciu

$$h : M_y \rightarrow R \quad \forall y \in M_y \quad h(y) = f(x_0, y)$$

Ak má funkcia $h(y)$ v bode y_0 deriváciu $h'(y_0)$, túto nazývame parciálna derivácia funkcie $f(x, y)$ v bode $A = [x_0, y_0]$ a označujeme

$$f'_y(x_0, y_0) = f'_y(A) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(A)$$

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{h(y) - h(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

Funkcia $f(x, y)$ spojitá v bode A nemusí mať v bode A parciálne derivácie.

Funkcia $f(x, y)$, ktorá má v bode A parciálne derivácie, nemusí byť v bode A spojitá.

Nech $M \subset E_2$ je množina tých bodov z $D(f)$, v ktorých existuje parciálna derivácia funkcie $f(x, y)$ podľa x (y).

Na množine M definujeme funkciu, ktorá každému bodu $A \in M$ priradí parciálnu deriváciu funkcie $f(x, y)$ v bode A podľa x (y).

Túto funkciu nazývame parciálna derivácia funkcie $f(x, y)$ podľa x (y)

$$f'_x = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$f'_x : M \rightarrow R$$

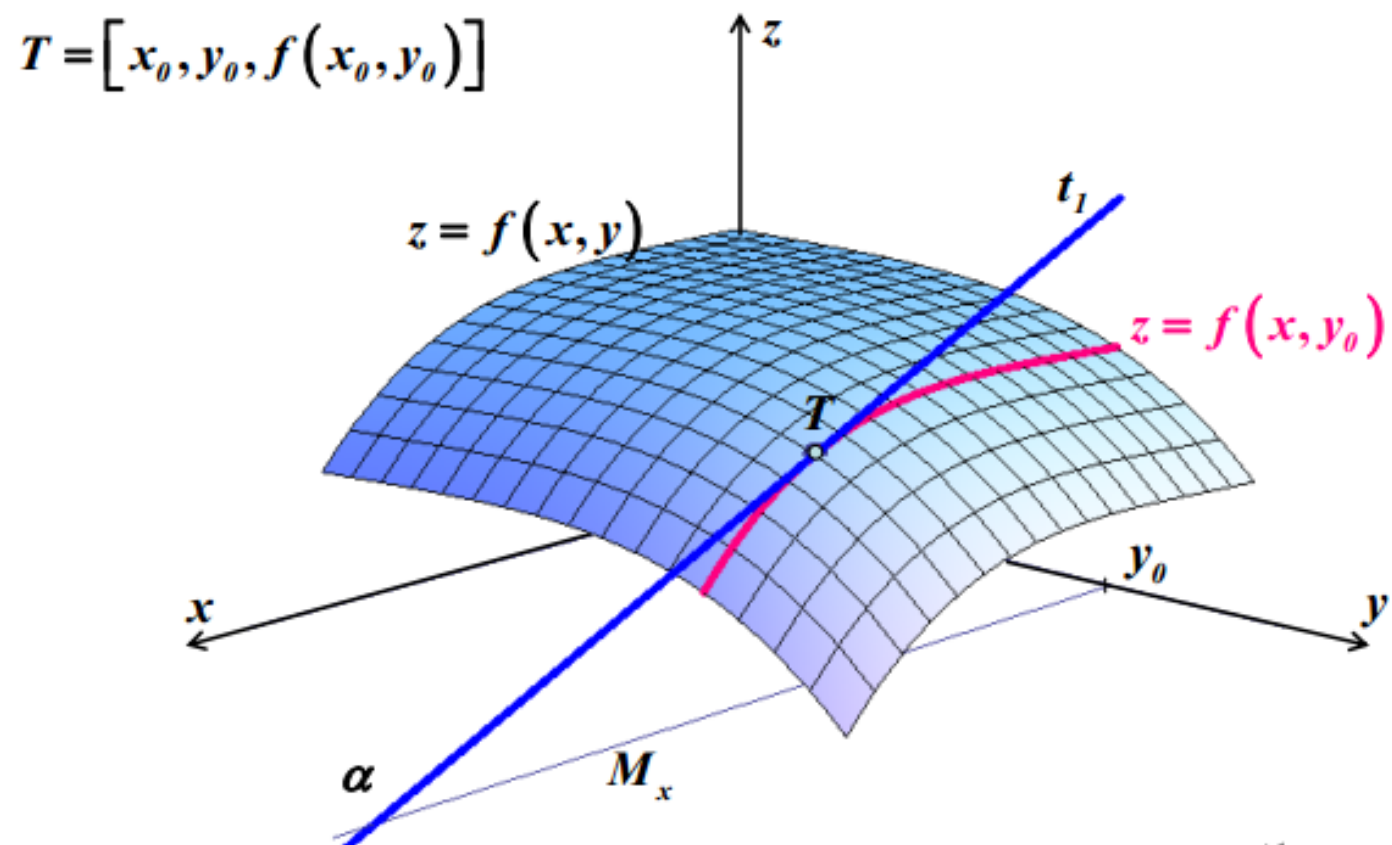
$$f'_x : A \rightarrow f'_x(A)$$

$$f'_y = \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$f'_y : M \rightarrow R$$

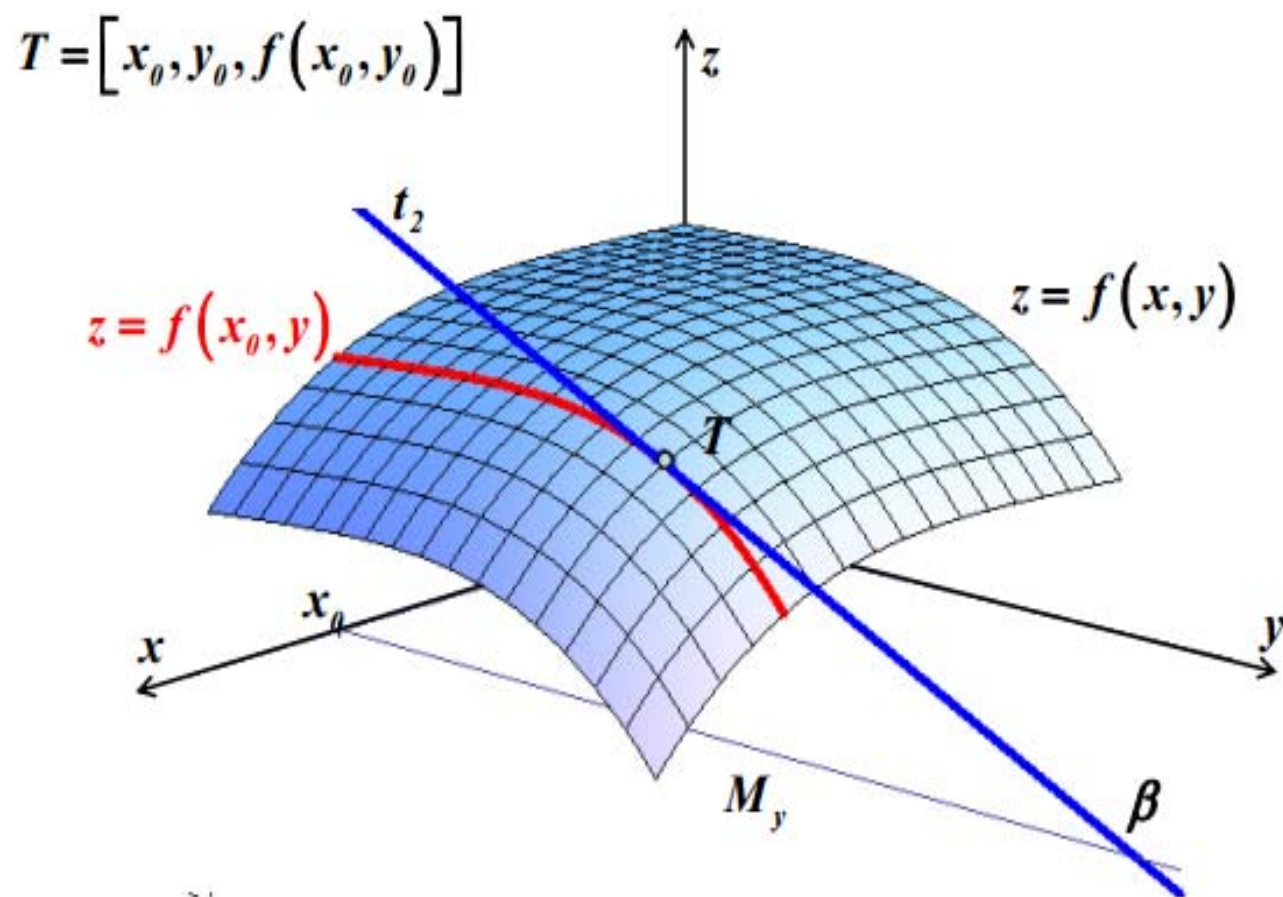
$$f'_y : A \rightarrow f'_y(A)$$

Geometrický význam parciálních derivací



$$\operatorname{tg} \alpha = f'_x(x_0, y_0)$$

$$\vec{s}_{t_1} = (1, 0, f'_x(x_0, y_0))$$

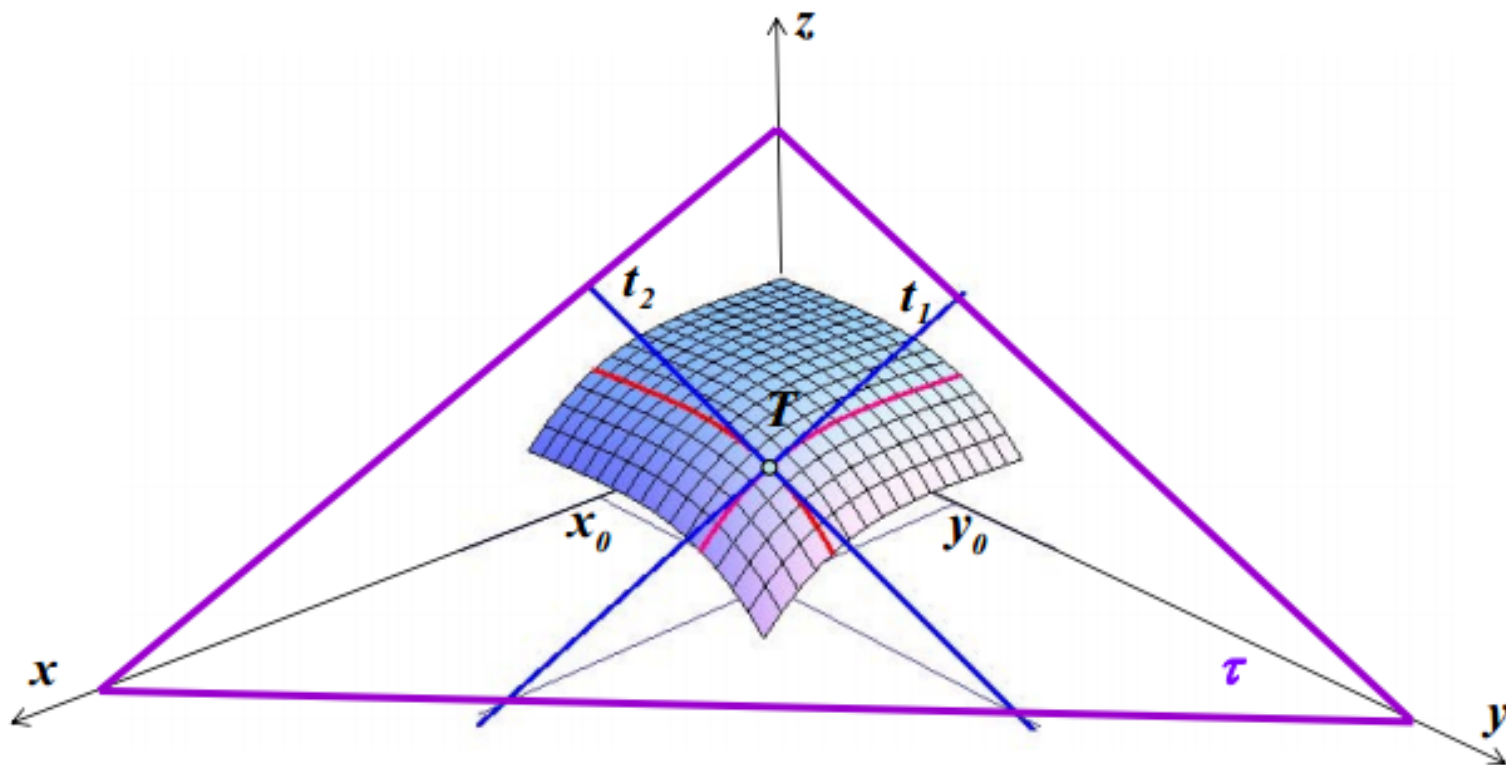


$$\operatorname{tg} \beta = f'_y(x_0, y_0)$$

$$\vec{s}_{t_2} = (0, 1, f'_y(x_0, y_0))$$

$\tau = (t_1, t_2)$ – dotyková rovina grafu funkcie $f(x, y)$ v bode

$$T = [x_0, y_0, f(x_0, y_0)] \in G(f)$$



normálový vektor roviny τ - $\vec{n} = \vec{s}_{t_1} \times \vec{s}_{t_2} = (-f'_x(x_0, y_0), -f'_y(x_0, y_0), 1)$

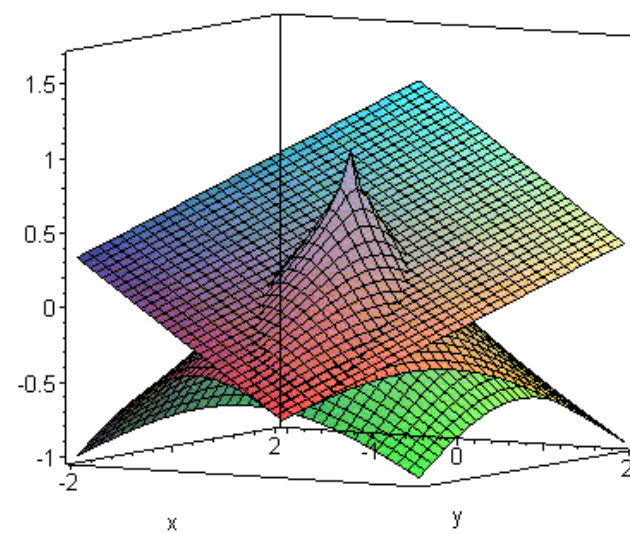
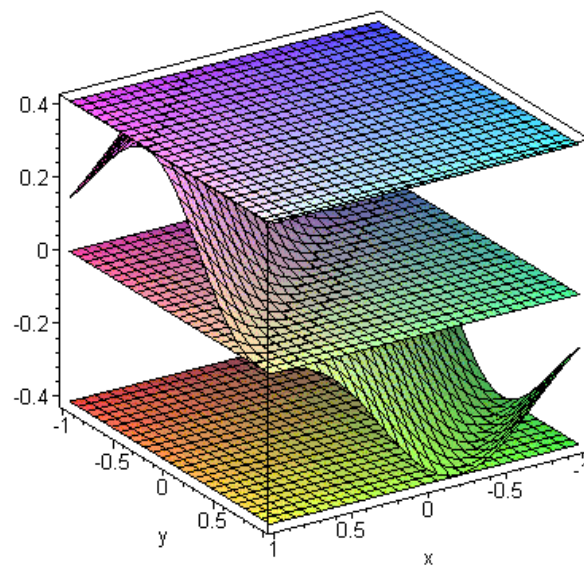
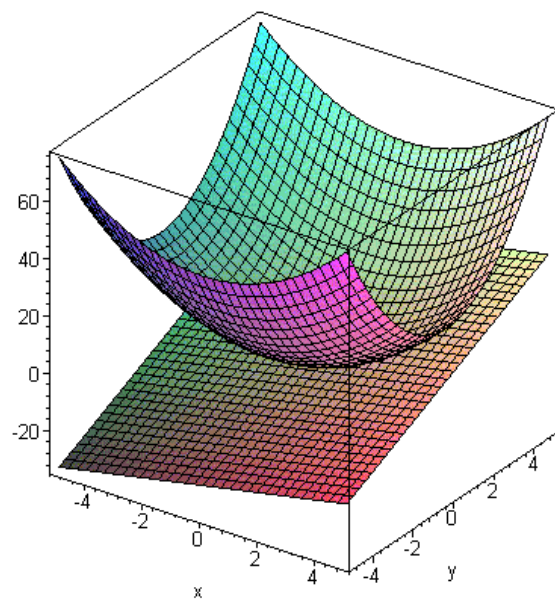
Nech $A = [x_0, y_0]$ je hromadným bodom oboru definície $D(f)$ funkcie $f(x, y)$ a nech existujú obe parciálne derivácie funkcie f v bode A

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_x(A), f'_y(x_0, y_0) = f'_y(A)$$

Dotyková rovina τ grafu funkcie f v bode dotyku

$T = [x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$ je určená rovnicou

$$z - f(A) = f'_x(A)(x - x_0) + f'_y(A)(y - y_0)$$



Nech $A = [x_0, y_0]$ je hromadným bodom oboru definície $D(f)$ funkcie $f(x, y)$ a nech obe parciálne derivácie f'_x, f'_y funkcie f existujú a sú spojité v bode A .

Potom sa funkcia f nazýva diferencovateľná v bode A .

Výraz

$$df_A(x, y) = f'_x(A)(x - x_0) + f'_y(A)(y - y_0)$$

sa nazýva totálny diferenciál funkcie f v bode A .

Ak platí: 1. $\lim_{X \rightarrow A} d(X, A) = 0$

2. funkcia f je spojitá v bode A

3. existujú parciálne derivácie $f'_x(A), f'_y(A)$

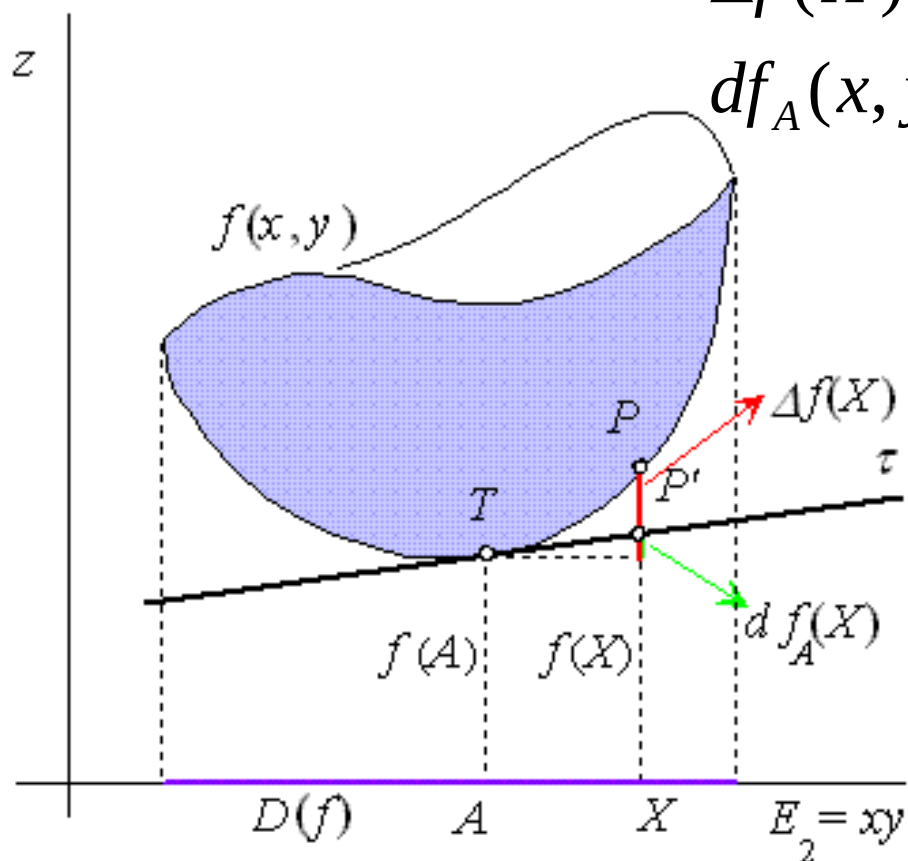
potom

$$f(X) - f(A) = f'_x(A)(x - x_0) + f'_y(A)(y - y_0)$$

Geometrická interpretácia diferenciálu funkcie dvoch premenných

$$\Delta f(X) = f(X) - f(A)$$

$$df_A(x, y) = f'_x(A)(x - x_0) + f'_y(A)(y - y_0)$$



$$\lim_{X \rightarrow A} d(X - A) = 0 \Rightarrow df_A(X) \doteq \Delta f(X)$$