

Viazané lokálne extrémym funkcie dvoch a viac premenných

**Nech je f funkcia dvoch premenných definovaná na $D(f) \subset E_2$
a nech množina $V = \{[x, y] \in D(f) : g(x, y) = 0\} \subset D(f)$.**

Podmienka daná rovnicou

$$g(x, y) = 0,$$

**ktorú spĺňajú súradnice všetkých bodov oboru definície funkcie f
patriace do množiny V nazývame väzba.**

**Extrémy funkcie f , ktoré hľadáme na množine $V \subset D(f)$ určenej
väzbou nazývame**

viazané lokálne extrémy funkcie f .

Funkcia f má v bode $A = [x_0, y_0]$ viazané lokálne maximum (minimum) pri väzbe $g(x, y) = 0$, ak existuje také okolie $O_\varepsilon(A)$ bodu A , že pre každý bod $X \in O_\varepsilon(A)$, ktorého súradnice spĺňajú väzbu, platí

$$f(X) \leq f(A) \quad ((f(X) \geq f(A))).$$

Ak platia ostré nerovnosti, hovoríme o ostrom viazanom lokálnom maxime, príp. minime.

Viazané lokálne minimum a maximum funkcie nazývame spoločným názvom viazané lokálne extrémny funkcie.

Určovanie viazaných lokálnych extrémov funkcie $f(x, y)$:

- 1. Z väzby $g(x, y) = 0$ vyjadríme premennú y pomocou x ako funkciu $y = h(x)$, túto funkciu dosadíme do funkcie $f(x, y)$ a získame zloženú funkciu**

$$f(x, h(x)) = F(x) ,$$

ktorá je funkciou jednej premennej x na množine V .

Nájdeme lokálne extrémy funkcie $F(x)$ definovanej na V ,

ktoré sú aj viazanými lokálnymi extrémami funkcie dvoch premenných $f(x, y)$.

2. Z väzby $g(x, y) = 0$ vyjadríme premennú x pomocou y ako funkciu $x = h(y)$, túto funkciu dosadíme do funkcie $f(x, y)$ a získame zloženú funkciu

$$f(h(y), y) = F(y) ,$$

ktorá je funkciou jednej premennej y na množine V .

Nájdeme lokálne extrémy funkcie $F(y)$ definovanej na V ,

ktoré sú aj viazanými lokálnymi extrémami funkcie dvoch premenných $f(x, y)$.

3. Ak sa z väzby nedá vyjadriť ani jedna z premenných x , alebo y pomocou druhej premennej, vytvoríme novú funkciu nazývanú Lagrangeova funkcia

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y),$$

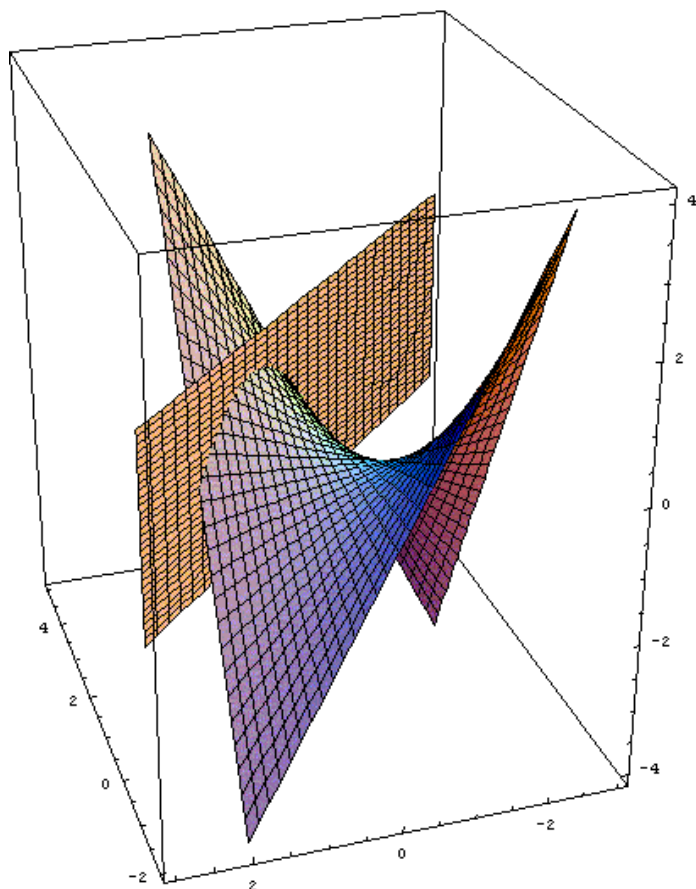
kde λ je číslo nazývané Lagrangeov multiplikátor (násobiteľ).

Funkcia $F(x, y)$ je definovaná na $D(f)$,

a v bodoch množiny V platí

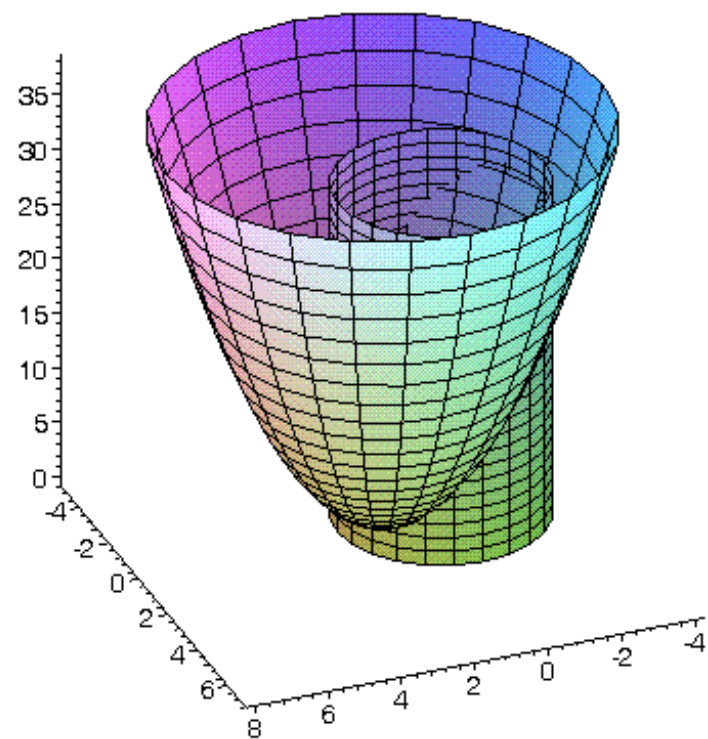
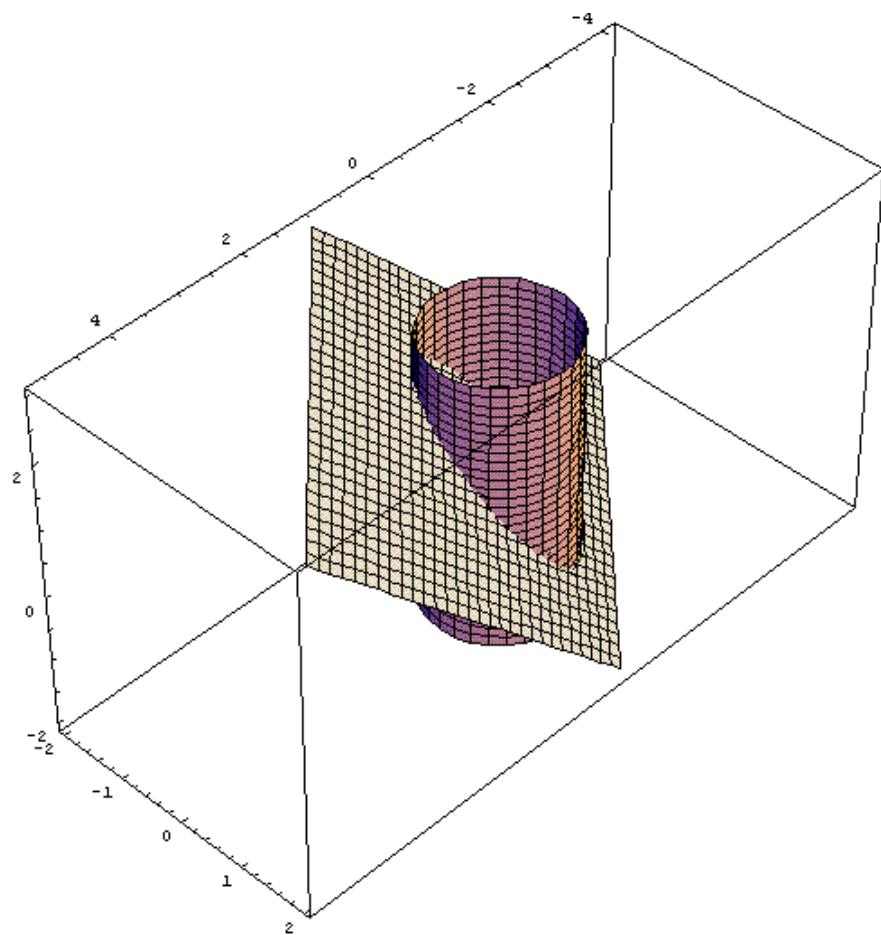
$$F(x, y) = f(x, y).$$

Ak má funkcia $F = f + \lambda g$ lokálny extrém v bode $A = [x_0, y_0] \in V$, potom má funkcia f v bode A viazaný lokálny extrém pre väzbu $g(x, y) = 0$.



Geometrická interpretácia

Viazané lokálne extrémny funkcie f sú z-tové súradnice extrémne položených bodov krivky, ktorá je prienikom grafu funkcie f s valcovou plochou s riadiacou čiarou v krivke definovanej v rovine xy väzbou, pričom tvoriace priamky plochy majú smer súradnicovej osi z .



Globálne extrémy funkcie viac premenných

**Nech f je funkcia n premenných, $n \geq 1$,
definovaná na množine $M \subset D(f)$.**

**Maximum (minimum) množiny všetkých hodnôt funkcie f pre $X \in M$
sa nazýva globálne (absolútne) maximum (minimum) funkcie f na M .**

**Globálne maximum a minimum majú spoločný názov globálne
extrémy funkcie f na množine M .**

**Ak je množina M uzavretá ohraničená oblasť, potom funkcia f má na
množine M globálne extrémy.**

Postup pri hľadaní globálnych extrémov funkcie:

- 1. Nájdeme všetky lokálne extrémym funkcie f vnútri množiny M .**
- 2. Nájdeme lokálne extrémym funkcie f na hranici množiny M , teda viazané lokálne extrémym funkcie f na hranici M .**
- 3. Globálne maximum (minimum) funkcie f na množine M je maximum (minimum) z lokálnych extrémov funkcie f vnútri množiny M a viazaných lokálnych extrémov funkcie f na hranici množiny M .**

Ak je množina M otvorená oblasť, funkcia f nemusí mať na M globálne extrémym.