

Lokálne extrémy funkcie dvoch premenných

**Nech je f funkcia viac premenných definovaná na $D(f) \subset E_n$
a bod A nech je ľubovoľný bod z jej oboru definície.**

Hovoríme, že funkcia f nadobúda v bode A

lokálne minimum, príp. maximum $f(A)$,

ak existuje také okolie $O_\varepsilon(A)$ bodu A , že pre každý bod $X \in D(f)$ platí

$$f(X) \geq f(A) \quad \text{príp. } (f(X) \leq f(A)).$$

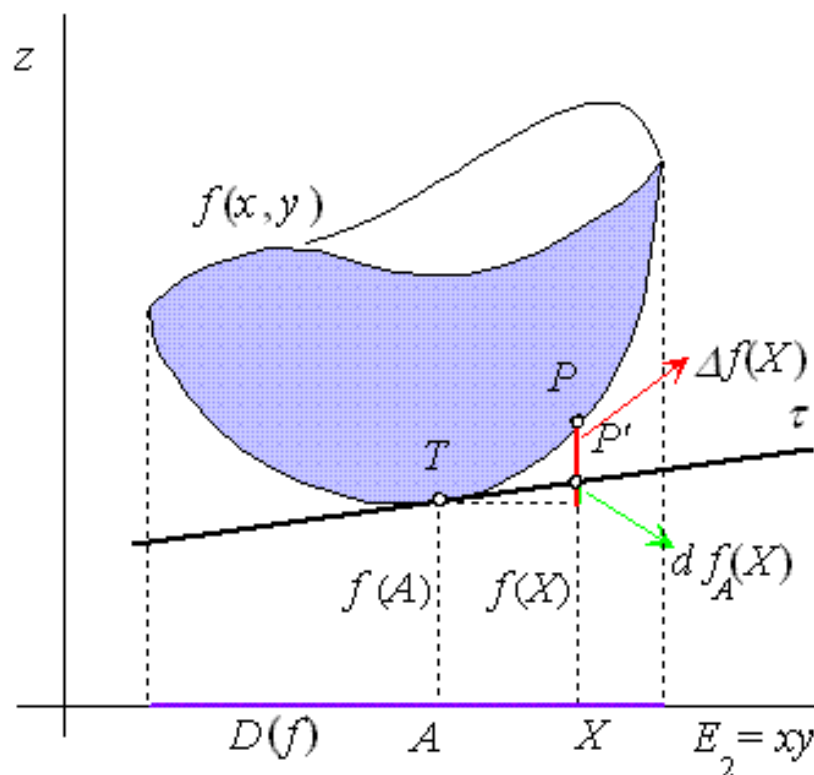
Ak platia ostré nerovnosti, hovoríme o ostrom lokálnom minime , príp. maxime.

Lokálne minimum a maximum funkcie nazývame spoločným názvom lokálne extrémny funkcie.

Funkcia f môže mať lokálny extrém len v týchto bodoch:

- 1. stacionárne body, v ktorých sa všetky parciálne derivácie funkcie, ktoré existujú, rovnajú nule**
- 2. body, v ktorých neexistuje žiadna parciálna derivácia.**

V stacionárnom bode funkcie f je totálny diferenciál nulový.



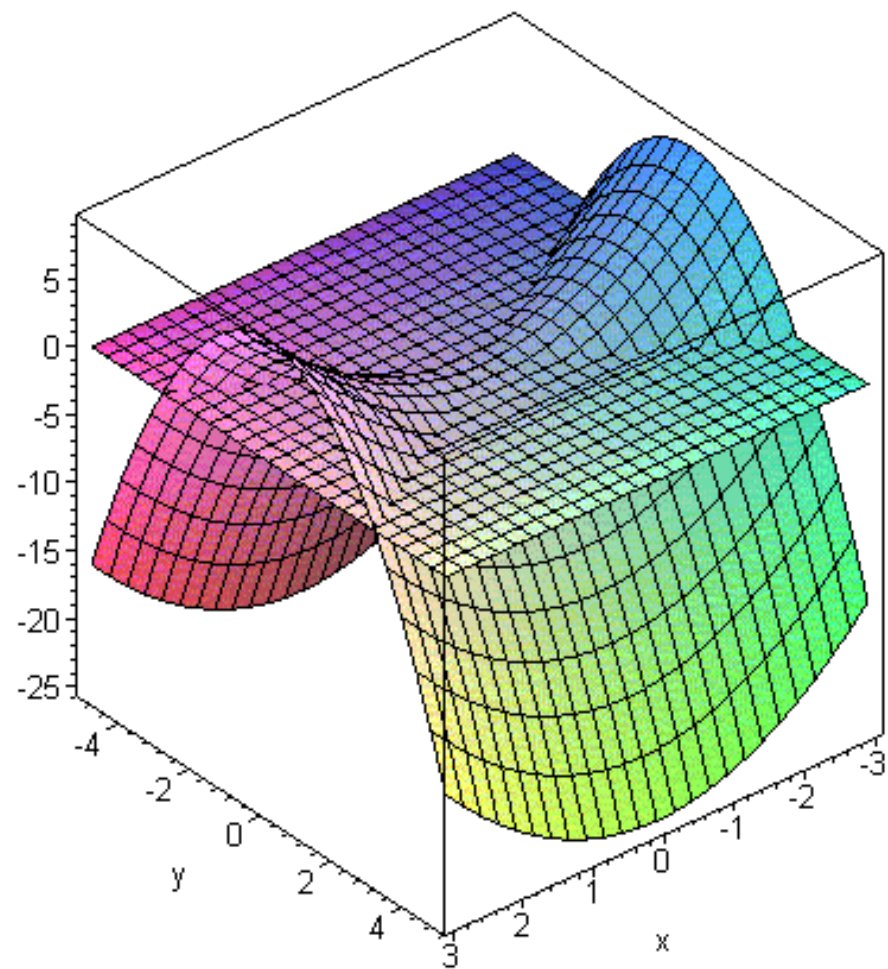
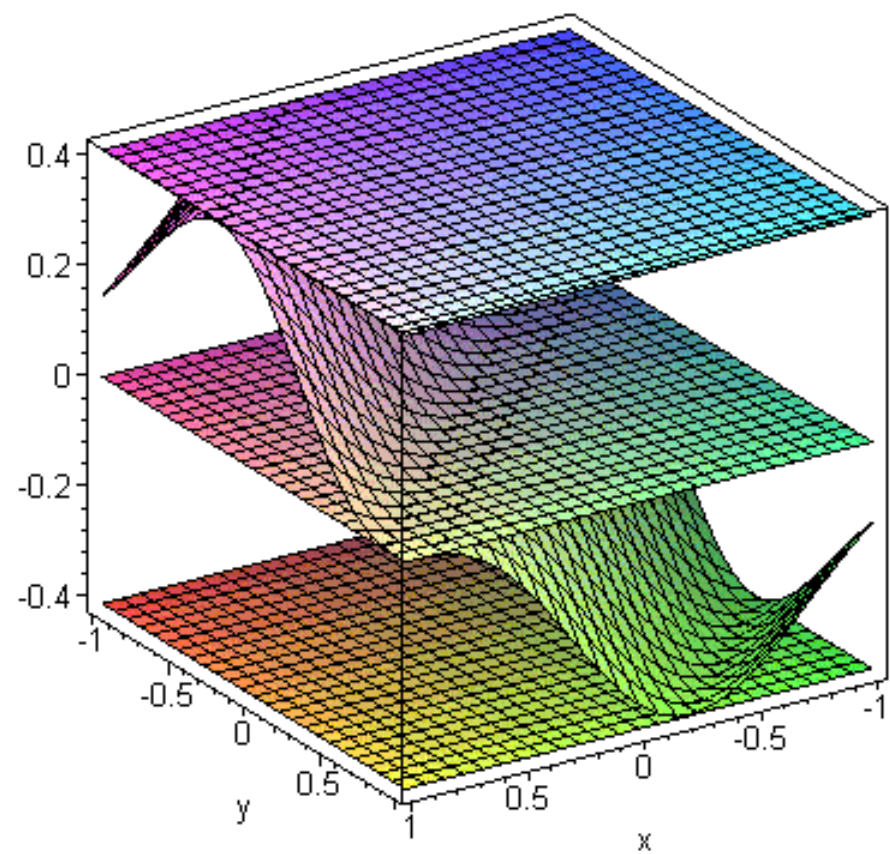
Geometrická interpretácia pre funkciu dvoch premenných

**Ak je bod $[x_0, y_0] \in D(f)$ stacionárnym bodom funkcie $f(x, y)$,
potom graf funkcie f , plocha $G(f) \subset E_3$, má v bode $T = [x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$
dotykovú rovinu, ktorá je rovnobežná so súradnicovou rovinou xy
a jej rovnica je**

$$z = f(x_0, y_0)$$

**Stacionárnosť bodu A je nutná, ale nie postačujúca podmienka na
existenciu lokálneho extrému funkcie v danom bode.**

**Funkcia môže mať lokálny extrém aj v takom bode, v ktorom nie je
diferencovateľná.**



Nech je $A = [x_0, y_0]$ stacionárny bod funkcie f dvoch premenných a nech v nejakom okolí $O_\varepsilon(A)$ bodu A má funkcia f spojité parciálne derivácie druhého rádu. Potom platí:

a) ak

$$D(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0$$

tak funkcia má v bode A ostrý lokálny extrém $f(x_0, y_0)$, a to

ostré lokálne minimum, ak $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$, resp. $f''_{yy}(x_0, y_0) > 0$,

ostré lokálne maximum, ak $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$, resp. $f''_{yy}(x_0, y_0) < 0$.

b) ak $D(x_0, y_0) < 0$, funkcia f nemá v bode A ostrý lokálny extrém.

c) ak $D(x_0, y_0) = 0$, nevieme o existencii extrému funkcie f v bode A rozhodnúť.

Determinant D nazývame

Hessián funkcie dvoch premenných $f(x, y)$ v bode A .

Postup pri určovaní lokálnych extrémov funkcie dvoch premenných:

- 1. Nájdeme stacionárne body danej funkcie a body, v ktorých táto funkcia nemá parciálne derivácie.**
- 2. Skúmame každý z kritických bodov získaných podľa kroku 1 a zistíme, či v ňom daná funkcia má alebo nemá extrém.**
 - V bodoch, v ktorých neexistujú parciálne derivácie, rozhodneme o existencii lokálneho extrému na základe definície.**
 - V stacionárnych bodoch, v ktorých má funkcia spojité druhé parciálne derivácie, rozhodneme o existencii lokálneho extrému pomocou Hessiánu funkcie v danom stacionárnom bode.**
 - V prípade, že Hessián D je v stacionárnom bode nulový, musíme správanie funkcie na okolí tohto bodu tiež vyšetrovať pomocou definície lokálnych extrémov funkcie.**