

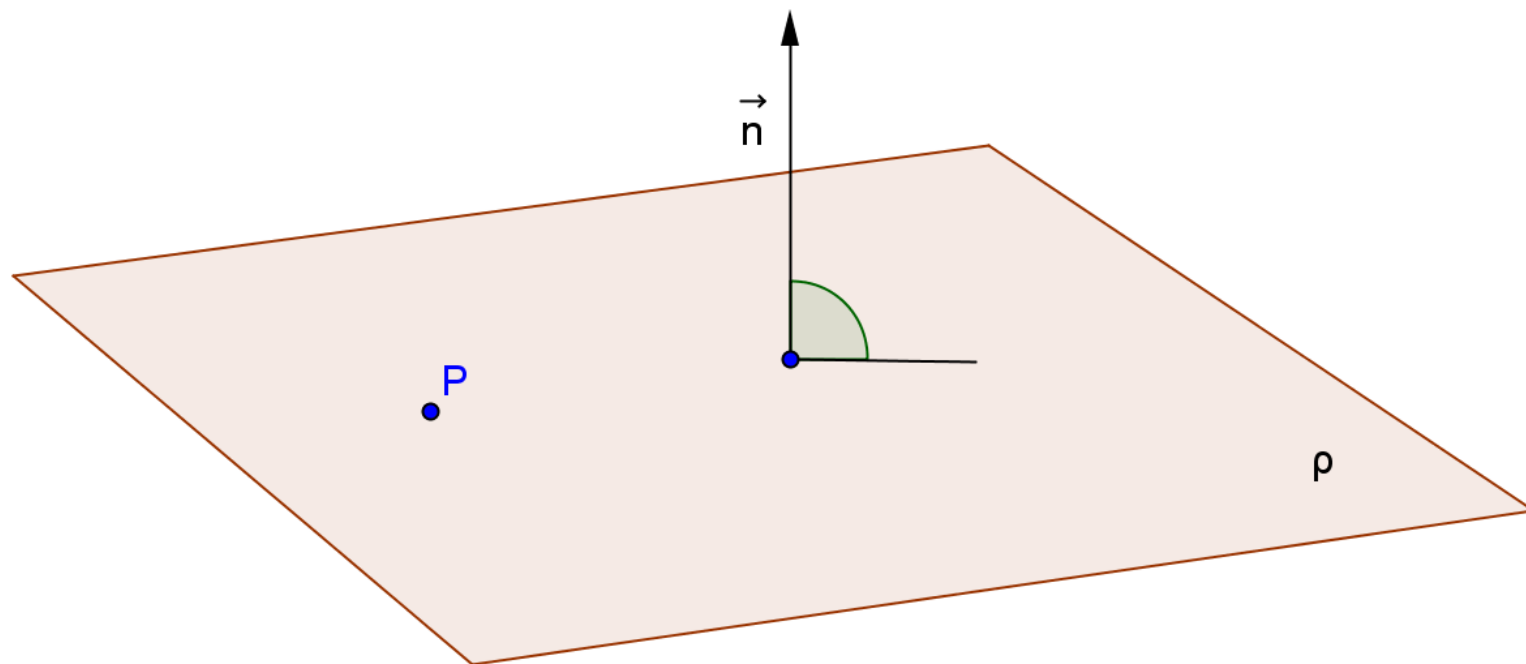
ANALYTICKÁ GEOMETRIA PRIESTORU

ROVINA

Rovina v priestore je jednoznačne určená

1. Tromi rôznymi nekolineárnymi bodmi
2. Dvoma rôznobežnými priamkami
3. Dvoma rôznymi rovnobežnými priamkami
4. Priamkou a bodom neležiacim na danej priamke
5. Bodom a smerom kolmým na daný smer

Rovinu jednoznačne určíme jedným jej ľubovoľným bodom P a vektorom $\vec{\mathbf{n}}$ kolmým na rovinu.



Každý nenulový vektor $\vec{\mathbf{n}}$, ktorý je kolmý na rovinu, sa nazýva normálový vektor roviny.

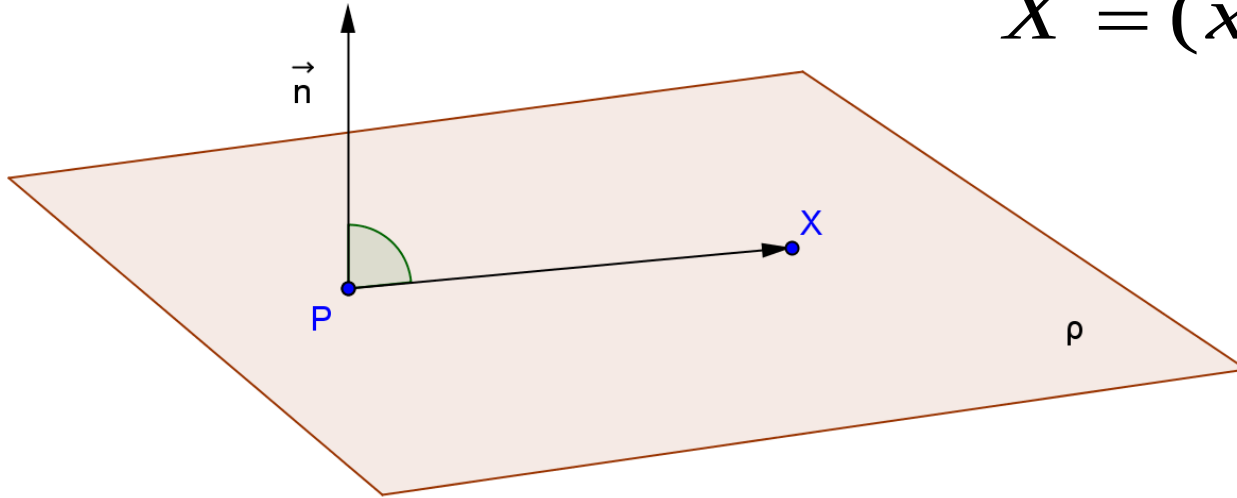
Pre ľubovoľný bod X roviny ρ platí

$$\vec{PX} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{PX} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\vec{n} = (a, b, c)$$

$$P = (x_P, y_P, z_P)$$

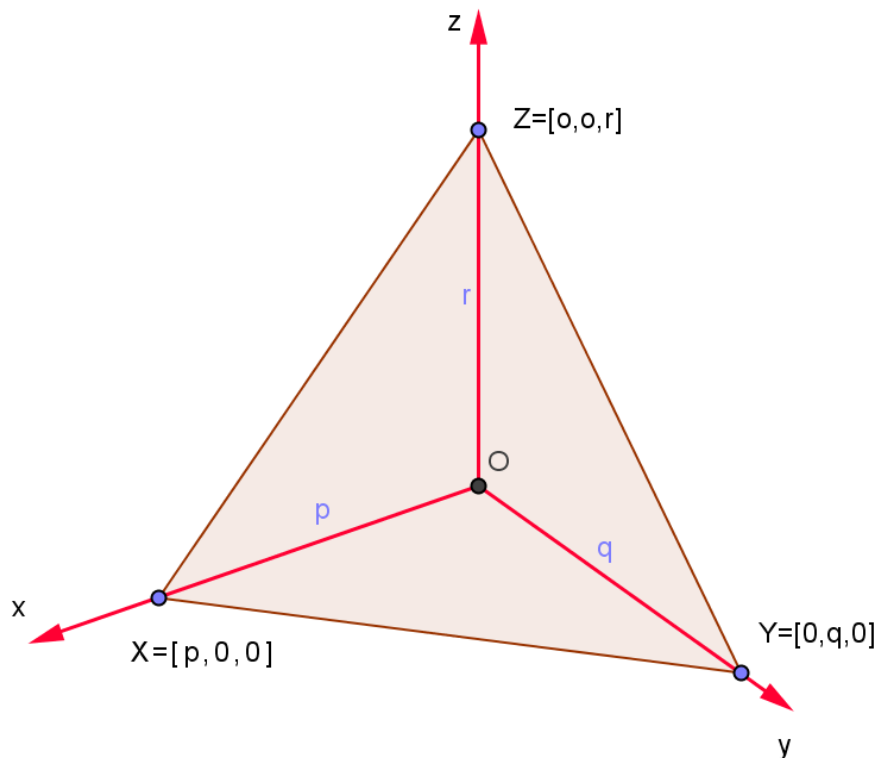
$$X = (x, y, z)$$



Všeobecná rovnica roviny

$$\rho : ax + by + cz + d = 0, a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$$

$$O = [0,0,0] \in \rho \Leftrightarrow d = 0, a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$$



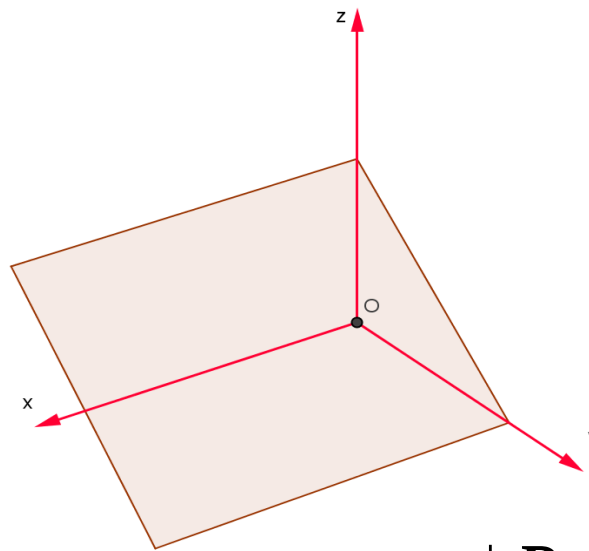
Úsekový tvar rovnice roviny – určenej tromi bodmi X, Y, Z

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1, \quad p, q, r \neq 0$$

Špeciálne polohy - rovina kolmá na súradnicovú rovinu
(rovnobežná so súradnicovou osou neležiacou v tejto rovine)

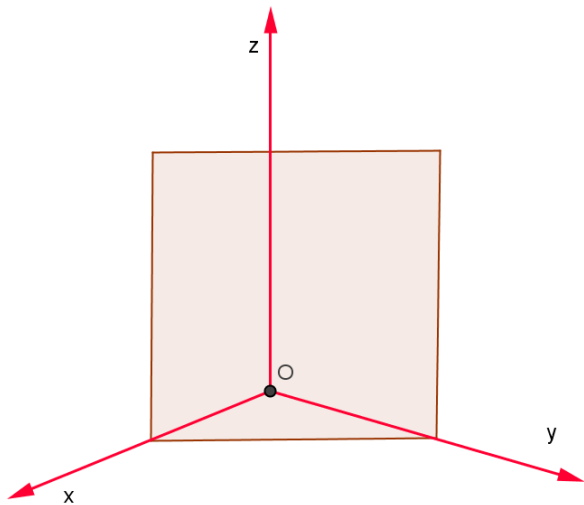
$$\rho \perp \mathbf{R}_{yz}, \rho \parallel x$$

$$by + cz + d = 0, \quad b \neq 0, c \neq 0$$



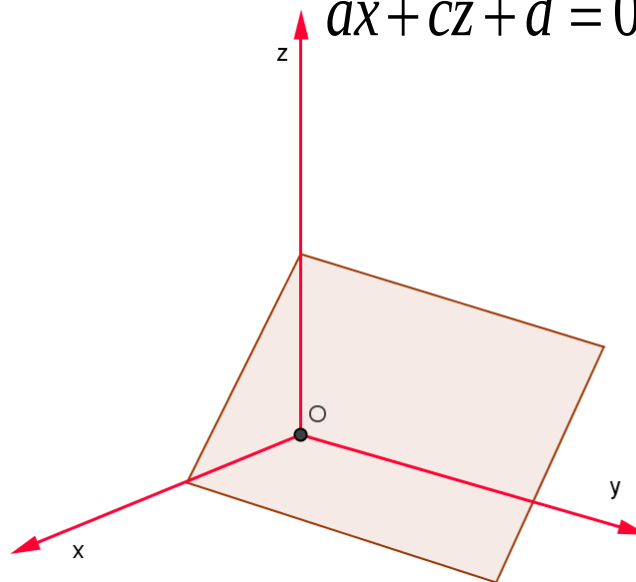
$$\rho \perp \mathbf{R}_{xy}, \rho \parallel z$$

$$ax + by + d = 0, \quad a \neq 0, b \neq 0$$



$$\rho \perp \mathbf{R}_{xz}, \rho \parallel y$$

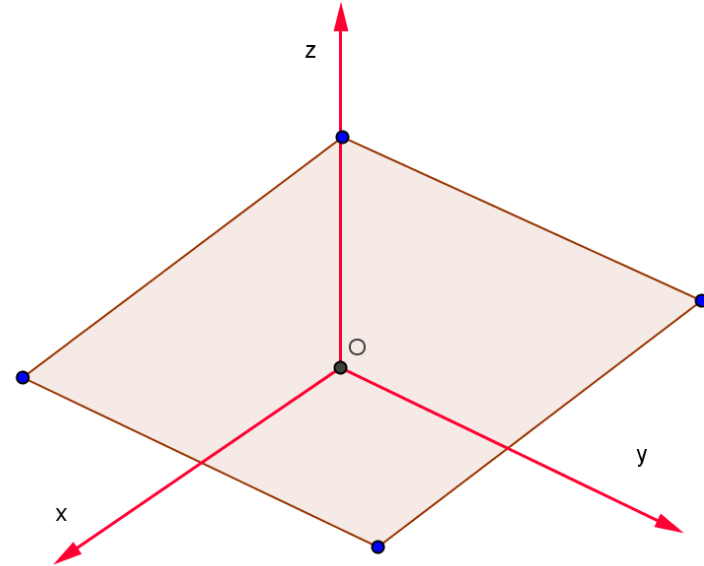
$$ax + cz + d = 0, \quad a \neq 0, c \neq 0$$



Špeciálne polohy - rovina rovnobežná so súradnicovou rovinou

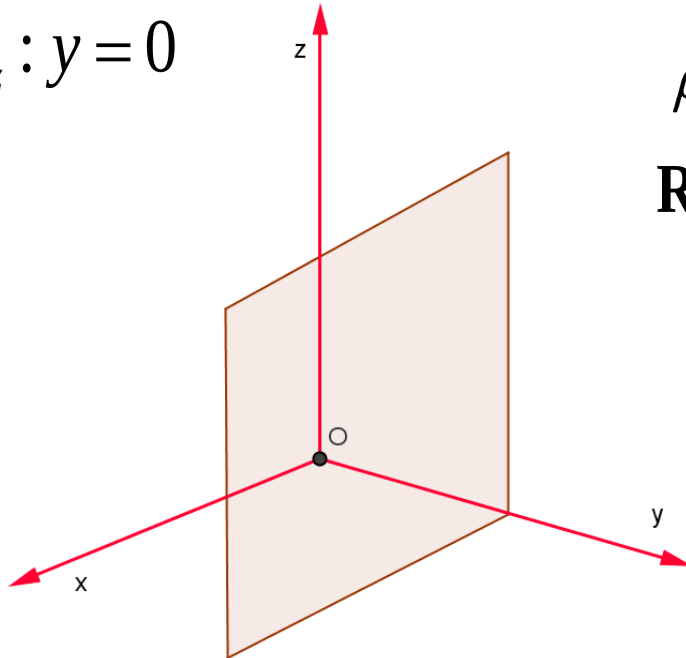
$$\rho \parallel \mathbf{R}_{xy} : cz + d = 0, \quad c \neq 0$$

$$\mathbf{R}_{xy} : z = 0$$



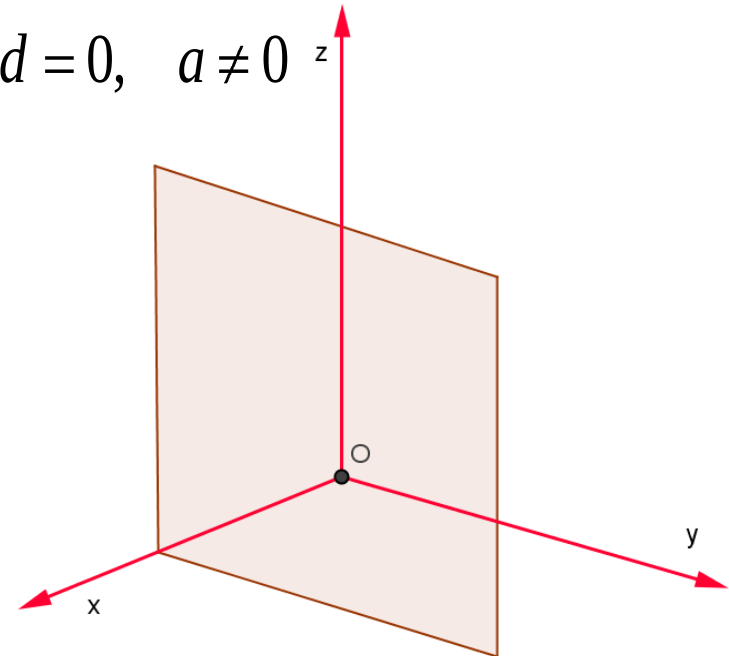
$$\rho \parallel \mathbf{R}_{xz} : by + d = 0, \quad b \neq 0$$

$$\mathbf{R}_{xz} : y = 0$$

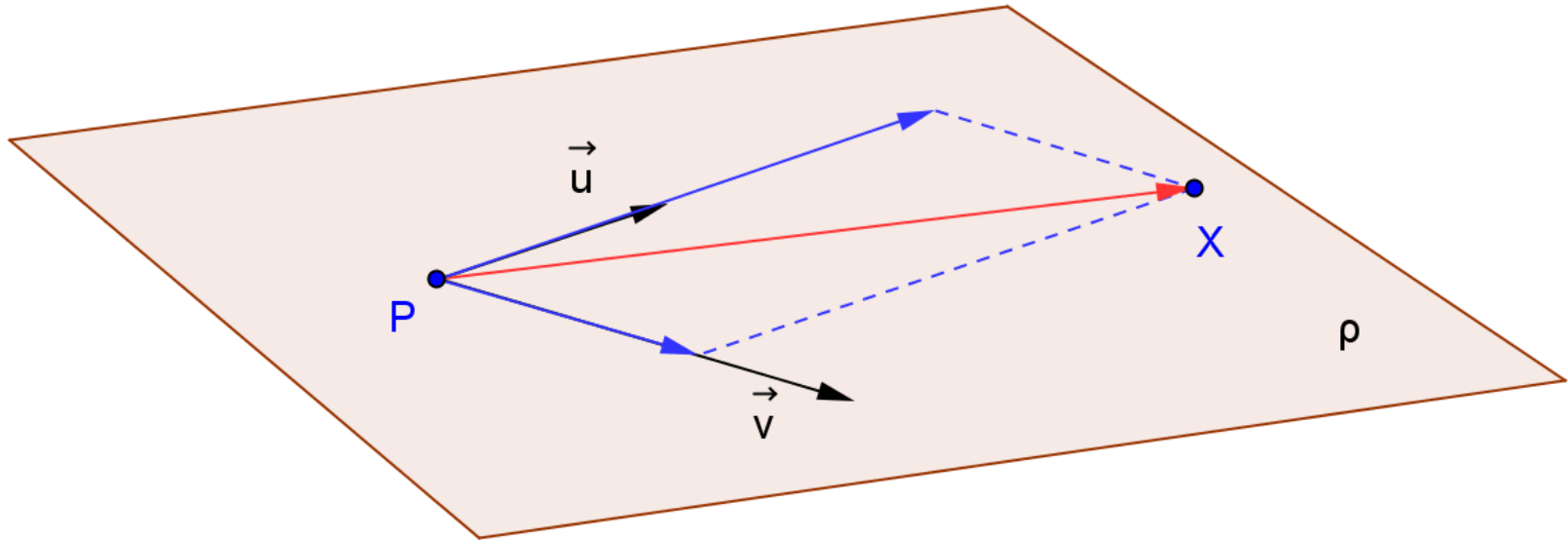


$$\rho \parallel \mathbf{R}_{yz} : ax + d = 0, \quad a \neq 0$$

$$\mathbf{R}_{yz} : x = 0$$



Rovinu jednoznačne určíme jedným jej ľubovoľným bodom P a dvoma smerovými vektormi $\vec{u}, \vec{v}$.



Každý vektor roviny sa dá vyjadriť ako súčet násobkov jej smerových vektorov.

$$\vec{PX} = t \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}, \quad t, s \in \mathbb{R}$$

Symbolický zápis parametrických rovnic roviny

$$\overrightarrow{PX} = X - P = t \cdot \overrightarrow{\mathbf{u}} + s \cdot \overrightarrow{\mathbf{v}}, \quad t, s \in R$$

$$X = P + t \cdot \overrightarrow{\mathbf{u}} + s \cdot \overrightarrow{\mathbf{v}}, \quad t, s \in R$$

Parametrické rovnice roviny

$$P = [x_P, y_P, z_P], \overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3), \overrightarrow{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$$

$$x = x_P + t \cdot u_1 + s \cdot v_1$$

$$y = y_P + t \cdot u_2 + s \cdot v_2$$

$$z = z_P + t \cdot u_3 + s \cdot v_3$$

$$X = [x, y, z], t, s \in R$$

Vzájomná poloha dvoch rovín

- **rovnobežné (rôzne)**

- kolmé na ten istý vektor, ktorý je ich spoločným normálovým vektorom $\vec{\mathbf{n}}$, nemajú spoločný bod

$$\alpha : ax + by + cz + d_1 = 0,$$

$$\beta : ax + by + cz + d_2 = 0$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$$

$$\vec{\mathbf{n}} = (a, b, c)$$

- **rôznobežné**

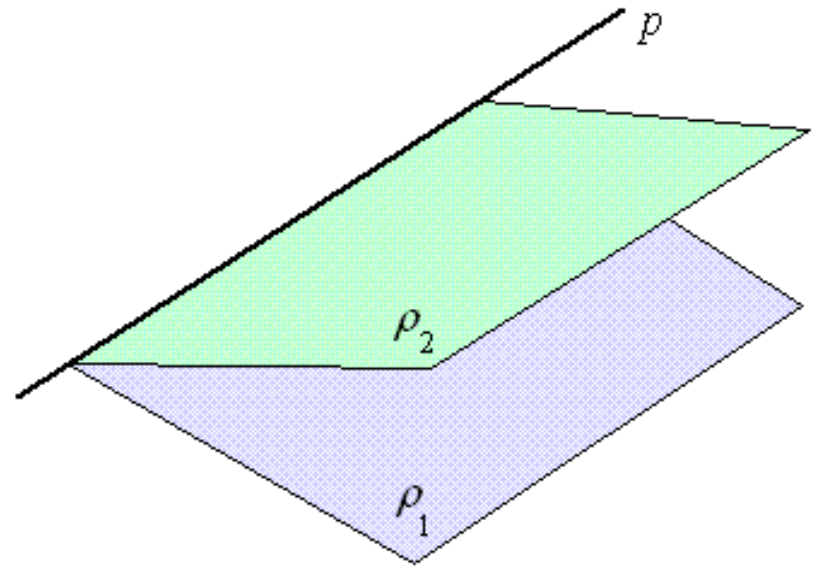
- majú spoločnú priamku, priesečnicu rovín

Priamku môžeme jednoznačne určiť
ako priesečnicu dvoch rôznych rovín

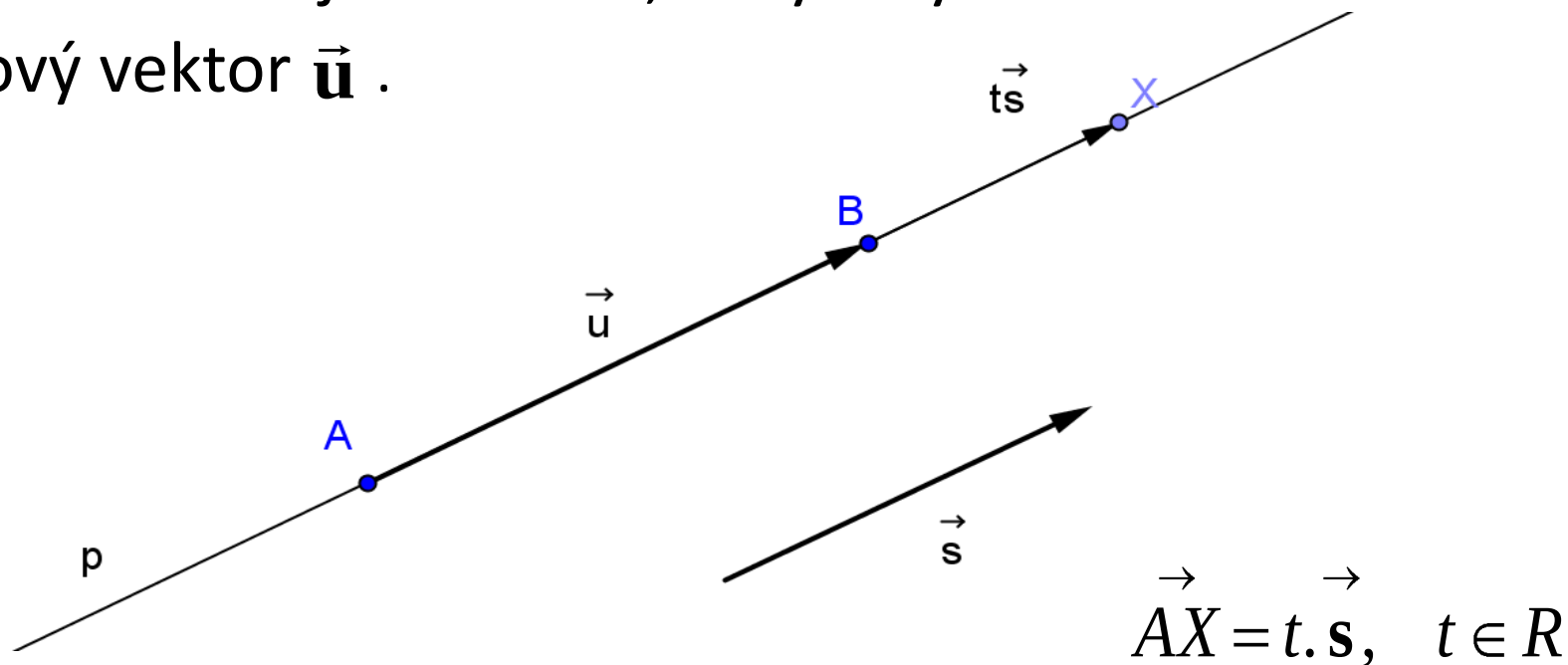
$$\rho_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \quad a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 \neq 0$$

$$\rho_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0, \quad a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 \neq 0$$

$$p = \rho_1 \cap \rho_2$$



Priamku jednoznačne určíme dvoma rôznymi bodmi, $p = AB$, alebo jedným ľubovoľným bodom A a vektorom určujúcim smer, nazývaným smerový vektor $\vec{u}$.



Každý nenulový vektor, ktorý je rovnobežný s priamkou, je jej smerovým vektorom. Každý vektor určený dvoma rôznymi bodmi priamky sa dá vyjadriť ako násobok jej smerového vektora.

Symbolický zápis parametrických rovníc priamky

$$\vec{AX} = X - A = t \cdot \vec{s}, \quad t \in R$$

$$X = A + t \cdot \vec{s}, \quad t \in R$$

Parametrické rovnice priamky

$$A = [x_A, y_A, z_A], \vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$$

$$x = x_A + t \cdot s_1$$

$$y = y_A + t \cdot s_2$$

$$z = z_A + t \cdot s_3$$

$$X = [x, y, z], t \in R$$

Vzájomná poloha dvoch priamok

- **rovnobežné**

- kolineárne smerové vektory

$$\vec{s}_2 = k \cdot \vec{s}_1, k \in R$$

$$X_1 = A + u \cdot \vec{s}_1, \quad u \in R$$

$$X_2 = B + v \cdot \vec{s}_2, \quad v \in R$$

- **rôznobežné**

- jeden spoločný bod

$$M = A + u_M \cdot \vec{s}_1 = B + v_M \cdot \vec{s}_2, \quad u_M, v_M \in R$$

- **mimobežné**

- nie sú rovnobežné a nemajú spoločný bod

$$\vec{s}_2 \neq k \cdot \vec{s}_1, k \in R$$

$$X_1 = A + u \cdot \vec{s}_1, \quad u \in R$$

$$X_2 = B + v \cdot \vec{s}_2, \quad v \in R$$

Vzájomná poloha priamky a roviny

- **rovnoobežné**

- koplánárne smerové vektory

$$\vec{s}_1 = k \cdot \vec{s}_2 + l \cdot \vec{s}_3, k, l \in R$$

$$X_1 = A + t \cdot \vec{s}_1, \quad t \in R$$

$$X_2 = B + u \cdot \vec{s}_2 + v \cdot \vec{s}_3, \quad u, v \in R$$

- smerový vektor priamky $\vec{s}_1$ je kolmý

- na normálový vektor roviny $\vec{n} = \vec{s}_2 \times \vec{s}_3, \vec{s}_1 \cdot \vec{n} = 0$

- **rôznoobežné**

- majú spoločný bod

$$M = A + t_M \cdot \vec{s}_1 = B + u_M \cdot \vec{s}_2 + v_M \cdot \vec{s}_3$$

$$t_M, u_M, v_M \in R$$

Meranie vzdialeností

- Vzdialenosť dvoch bodov

- Vzdialenosť bodu $A = [x_0, y_0, z_0]$

- od roviny $ax + by + cz + d = 0$

$$d(A, \rho) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

- Vzdialenosť bodu a priamky

- Vzdialenosť dvoch rovnobežných priamok

- Vzdialenosť dvoch rovnobežných rovín

$$ax + by + cz + d_1 = 0$$

$$ax + by + cz + d_2 = 0$$

$$d(\rho_1, \rho_2) = \frac{|d_1 - d_2|}{|\vec{n}|}, \vec{n} = (a, b, c)$$

Meranie uhlov

- Uhol dvoch priamok $A\vec{u}, B\vec{v}$, $\cos\varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$

– Uhol priamky $A\vec{u}$

a roviny $ax + by + cz + d = 0$

$$\cos(90^\circ - \varphi) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}, \vec{n} = (a, b, c)$$

– Uhol dvoch rovín $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}, \vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1), \vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$$