

Limita a spojitost' funkcie viac premenných

Nech je funkcia $f(X)$ definovaná v istom okolí bodu $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$, ktorý je hromadným bodom jej oboru definície $D(f)$.

Číslo b nazývame limitou funkcie $f(X)$ v bode A , ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje také $\delta > 0$, že pre všetky $X \in O_\delta(A)$, $X \neq A$, je $f(X) \in O_\varepsilon(b)$.

$$\lim_{X \rightarrow A} f(X) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : d(X, A) < \delta \Rightarrow |f(X) - b| < \varepsilon$$

Ak je $f(X)$ funkciou dvoch premenných a $A = [x_0, y_0]$, potom môžeme písať aj

$$\lim_{X \rightarrow [x_0, y_0]} f(X) = b$$

Nech funkcie f a g majú v bode A limitu

$$\lim_{X \rightarrow A} f(X) = b_1, \lim_{X \rightarrow B} g(X) = b_2$$

Potom má v bode A limitu aj funkcia:

1. $c_1f + c_2g$, kde c_1, c_2 sú ľubovoľné konštanty a platí

$$\lim_{X \rightarrow A} (c_1f(X) + c_2g(X)) = c_1b_1 + c_2b_2$$

2. $f \cdot g$ a platí

$$\lim_{X \rightarrow A} f(X) \cdot g(X) = b_1b_2$$

3. $\frac{f}{g}$ a platí

$$\lim_{X \rightarrow A} \frac{f(X)}{g(X)} = \frac{b_1}{b_2}, b_2 \neq 0$$

Nevlastná limita funkcie viac premenných vo vlastnom bode, ktorý je hromadným bodom jej definičného oboru, je definovaná podobne, ako nevlastná limita funkcie jednej premennej.

$$\lim_{X \rightarrow A} f(X) = \infty \Leftrightarrow \forall K > 0 \exists \delta > 0 : d(X, A) < \delta \Rightarrow f(X) > K$$

$$\lim_{X \rightarrow A} f(X) = -\infty \Leftrightarrow \forall K > 0 \exists \delta > 0 : d(X, A) < \delta \Rightarrow f(X) < -K$$

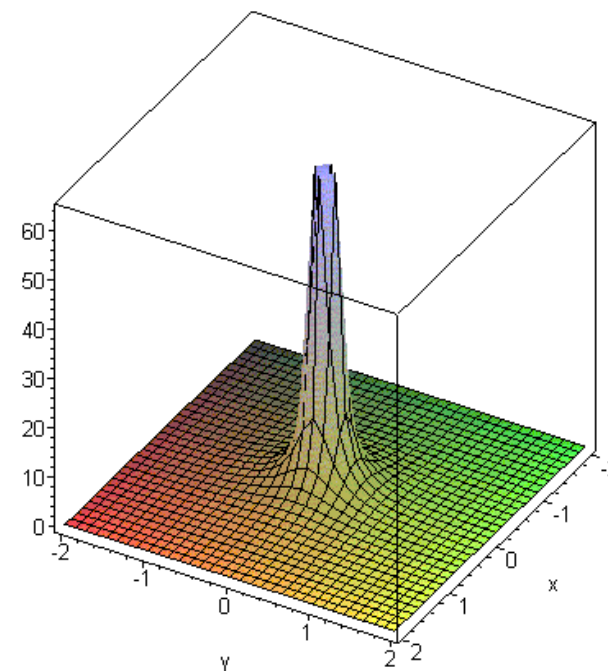
Funkcia $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$

nie je definovaná v bode $[0, 0]$, ktorý je hromadným bodom $D(f) = E_2 - \{[0, 0]\}$

Platí $\lim_{X \rightarrow [0,0]} (x^2 + y^2) = 0$

preto existuje nevlastná limita

$$\lim_{X \rightarrow [0,0]} f(x, y) = \lim_{X \rightarrow [0,0]} \frac{1}{x^2 + y^2} = \infty$$



Nech je funkcia $f(X)$ definovaná na nejakom okolí bodu

$A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$, ktorý je hromadný bod jej oboru definície $D(f)$.

Funkcia $f(X)$ je spojitá v bode A , ak má v bode A limitu a táto sa rovná funkčnej hodnote f v bode A .

Platí

$$\lim_{X \rightarrow A} f(X) = f(A)$$

Ak je funkcia f spojitá v každom bode množiny $M \subset D(f)$, hovoríme, že je spojitá na množine M .

Ak $M = D(f)$, hovoríme, že f je spojitá funkcia.

Ak sú funkcie f a g definované na nejakom okolí bodu A a sú v bode A spojité, tak aj funkcie

$$c_1 f + c_2 g, \quad c_1, c_2 \in \mathbf{R} \quad \text{a} \quad f \cdot g,$$

sú spojité v bode A .

Ak platí $g(A) \neq 0$, potom aj funkcia $\frac{f}{g}$ je spojitá v bode A .

Funkcia viac premenných spojitá na uzavretej oblasti má podobné vlastnosti ako funkcia jednej premennej spojitá na uzavretom intervale.

Ak je funkcia f spojitá na ohraničenej súvislej uzavretej oblasti $\Omega \subset E_n$, potom:

1. Funkcia f je ohraničená na Ω , teda existuje také číslo $K > 0$, že $|f(X)| < K$ pre každý bod $X \in \Omega$.
2. Funkcia f nadobúda na množine Ω svoje maximum aj minimum, teda existuje aspoň jeden bod $P_1 \in \Omega$ a aspoň jeden bod $P_2 \in \Omega$ taký, že $f(X) \leq f(P_1)$, $f(X) \geq f(P_2)$ pre každý bod $X \in \Omega$.
3. Ak A, B sú dva rôzne body z oblasti Ω také, že $f(A) \neq f(B)$, funkcia f nadobudne každú hodnotu medzi $f(A)$ a $f(B)$ aspoň v jednom bode oblasti Ω , teda existuje aspoň jeden bod $C \in \Omega$ taký, že
$$f(A) < f(C) < f(B).$$

Oborom hodnôt funkcie f dvoch premenných, ktorá je spojitá na ohraničenej uzavretej oblasti Ω , teda obrazom oblasti Ω v zobrazení určenom danou funkciou f , je uzavretý interval v $\mathbf{R}$.

