

DIFERENCIÁLNE ROVNICE
DRUHÉHO RÁDU
so špeciálnou pravou stranou

Princíp hľadania riešenia nehomogénnej LDR 2. rádu

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = q(x)$$

1. Nájdeme všeobecné riešenie homogénnej LDR

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = 0$$

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2, \quad c_1, c_2 \in R$$

2. Nájdeme jedno riešenie $\tilde{y}$ nehomogénnej LDR

3. Všeobecné riešenie nehomogénnej LDR je

$$y_v = y_h + \tilde{y} = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \tilde{y}, \quad c_1, c_2 \in R$$

Metóda variácie konštant – nájdenie partikulárneho riešenia $\tilde{y}$ nehomogénnej LDR

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = q(x)$$

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = 0 \Rightarrow y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2, \quad c_1, c_2 \in R$$

$$\tilde{y} = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2$$

$$c_1(x) = \int \frac{W_1}{W} dx \quad c_2(x) = \int \frac{W_2}{W} dx$$

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ q(x) & y_2' \end{vmatrix} \quad W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & q(x) \end{vmatrix}$$

Riešenie nehomogénnej LDR 2. rádu s konšt. koeficientmi a špeciálnou pravou stranou

a) ak má pravá strana tvar

$$q(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$$

kde $\alpha \in R$ a $P_n(x)$ je polynóm n -tého stupňa, potom riešenie má tvar

$$\tilde{y} = x^k e^{\alpha x} P_n^*(x)$$

Číslo $k \in \{0, 1, 2\}$ udáva násobnosť koreňa α príslušnej charakteristickej rovnice

a $P_n^*(x)$ je neznámy polynóm stupňa n , ktorého koeficienty určíme metódou neurčitých koeficientov.

Riešenie nehomogénnej LDR 2. rádu s konšt. koeficientmi a špeciálnou pravou stranou

b) ak má pravá strana tvar

$$q(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x)$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a $P_n(x)$, $Q_m(x)$ sú polynómy n -tého a m -tého stupňa, potom riešenie má tvar

$$\tilde{y} = x^k e^{\alpha x} (P_s^*(x) \cos \beta x + Q_s^*(x) \sin \beta x)$$

Číslo $k \in \{0, 1\}$ udáva násobnosť komplexného čísla $\alpha + i\beta$, ktoré je koreňom príslušnej charakteristickej rovnice a $P_s^*(x)$, $Q_s^*(x)$ sú neznáme polynómy stupňa $s = \max\{m, n\}$.

Prehľad typov LDR a ich riešení

1. LDR 1. rádu so separovanými premennými

$$p(x) + q(y) y' = 0$$

Riešenie – integrovaním rovnice

2. LDR 1. rádu so separovateľnými premennými

$$p_1(x) q_1(y) + p_2(x) q_2(y) y' = 0$$

Riešenie – separáciou premenných a integrovaním rovnice

3. LDR 1. rádu homogénna

$$y' + p(x) y = 0$$

Riešenie – separáciou premenných a integrovaním rovnice

$$y_h = c.e^{-\int p(x)dx}, c \in R$$

4. LDR 1. rádu nehomogénna

$$y' + p(x) y = q(x)$$

Riešenie – všeob. rieš. LDR homog. + part. rieš. LDR nehomog.

$$y_v = y_h + \tilde{y} = c.e^{-\int p(x)dx} + c(x).e^{-\int p(x)dx}, c \in R, x \in R$$

$c(x)$ určíme metódou variácie konštanty

5. LDR 2. rádu homogénna

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = 0$$

Riešenie – nájdenie fundamentálneho systému riešení, teda 2 lineárne nezávislé partikulárne riešenia y_1, y_2 pomocou koreňov charakteristickej rovnice

$$r^2 + p_1 r + p_2 = 0$$

a) $r_1 \neq r_2 \Rightarrow y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}$

b) $r = r_1 = r_2 \Rightarrow y_1 = e^{rx}, y_2 = x e^{rx}$

c) $r_1 = a + ib, r_2 = a - ib \Rightarrow y_1 = e^{ax} \cos bx, y_2 = e^{ax} \sin bx$

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

6. LDR 2. rádu nehomogénna

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = q(x)$$

Riešenie – všeob. rieš. LDR homog. + part. rieš. LDR nehomog. metódou variácie konštánt

$$y_v = y_h + \tilde{y} = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \tilde{y}, \quad c_1, c_2 \in R$$

$$\tilde{y} = y_1 \int \frac{W_1}{W} dx + y_2 \int \frac{W_2}{W} dx$$

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ q(x) & y_2' \end{vmatrix} \quad W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & q(x) \end{vmatrix}$$

7. LDR 2. rádu nehomogénna

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = q(x)$$

Riešenie – všeob. rieš. LDR homog. + part. rieš. LDR nehomog. na základe špeciálneho tvaru pravej strany $q(x)$

$$y_v = y_h + \tilde{y} = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \tilde{y}, \quad c_1, c_2 \in R$$

a) $q(x) = e^{\alpha x} P_n(x) \Rightarrow \tilde{y} = x^k e^{\alpha x} P_n^*(x), k \in \{0,1,2\}$

b) $q(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x) \Rightarrow$

$$\tilde{y} = x^k e^{\alpha x} (P_s^*(x) \cos \beta x + Q_s^*(x) \sin \beta x), k \in \{0,1\}$$