

# DIFERENCIÁLNE ROVNICE DRUHÉHO RÁDU

# Lineárna diferenciálna rovnica druhého rádu s konštantnými koeficientmi

je diferenciálna rovnica v tvare

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = q(x)$$

kde  $p_1, p_2$  sú reálne čísla a  $q(x)$  je spojitá funkcia na  $(a, b)$ .

Ak je  $q(x) = 0, \forall x \in (a, b)$ , rovnica sa nazýva homogénna, v opačnom prípade je nehomogénna.

Existuje práve jedno riešenie LDR

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = q(x)$$

ktoré spĺňa začiatočné podmienky

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, x_0 \in (a, b).$$

# HOMOGÉNNA LDR 2. rádu

Dve riešenia  $y_1, y_2$  rovnice v tvare

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = 0$$

sú lineárne závislé na  $R$ , ak existuje také číslo  $k$ , že pre každé  $x \in R$  platí  $y_1 = k y_2$ .

Ak riešenia  $y_1, y_2$  homogénnej LDR nie sú lineárne závislé na  $R$ , hovoríme, že sú **lineárne nezávislé** na  $R$ .

Funkcia  $y_1 = 0$ , je riešením každej homogénnej LDR a toto riešenie nazývame triviálne riešenie.

Nech sú funkcie  $y_1, y_2$  definované na intervale  $J$  a majú na tomto intervale derivácie  $y_1', y_2'$

Determinant

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

nazývame Wronského determinant funkcií  $y_1, y_2$  (wronskián) a označujeme  $W(y_1, y_2)$ .

Riešenia  $y_1, y_2$  homogénnej LDR sú lineárne nezávislé na  $J$  práve vtedy,

ak  $W(y_1, y_2) \neq 0, \forall x \in J$ .

Systém dvoch lineárne nezávislých riešení  
homogénnej LDR sa nazýva  
**fundamentálny systém riešení**  
tejto diferenciálnej rovnice.

Ak funkcie  $y_1, y_2$  tvoria fundamentálny systém  
riešení homogénnej LDR

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = 0$$

potom jej všeobecné riešenie má tvar

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2, \quad c_1, c_2 \in R$$

Všeobecné riešenie homogénnej LDR 2. rádu  
s konštantnými koeficientmi

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = 0$$

Zostavíme kvadratickú rovnicu

$$r^2 + p_1 r + p_2 = 0$$

ktorá sa nazýva charakteristická rovnica  
prislúchajúca LDR a hľadáme jej korene.

# 1. Charakteristická rovnica má 2 rôzne reálne korene

Funkcie  $y_1, y_2$  tvoria fundamentálny systém riešení rovnice

$$r_1 \rightarrow y_1 = e^{r_1 x}$$

$$r_2 \rightarrow y_2 = e^{r_2 x}$$

a všeobecné riešenie má tvar

$$y_h = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}, \quad c_1, c_2 \in R, x \in R$$

## 2. Charakteristická rovnica má dvojnásobný koreň

$$r = r_1 = r_2$$

$$r \rightarrow y_1 = e^{rx}$$

$$y_2 = xe^{rx}$$

Funkcie  $y_1, y_2$  tvoria fundamentálny systém riešení rovnice a všeobecné riešenie má tvar

$$y_h = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}, \quad c_1, c_2 \in R, x \in R$$

**3. Charakteristická rovnica má 2 komplexne združené korene**

$$r_1 = a + ib, r_2 = a - ib$$

$$r_1 = a + ib \rightarrow y_1 = e^{ax} \cos bx \quad r_2 = a - bi \rightarrow \emptyset$$

$$y_2 = e^{ax} \sin bx$$

Funkcie  $y_1, y_2$  tvoria fundamentálny systém riešení rovnice  
a všeobecné riešenie má tvar

$$y_h = c_1 e^{ax} \cos bx + c_2 e^{ax} \sin bx, \quad c_1, c_2 \in R, x \in R$$