

DIFERENCIÁLNE ROVNICE

Základné pojmy

Obyčajná diferenciálna rovnica = ODR

je každá rovnica, ktorá vyjadruje vzťah medzi
nezávisle premennou x z nejakej množiny $M \subset \mathbb{R}$,
neznámou funkciou $f(x)$
a aspoň jednou z derivácií $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)$, $n \in \mathbb{N}$ tejto funkcie.

Označme $f(x) = y$, $f'(x) = y'$, $f''(x) = y''$, $\dots$, $f^{(n)}(x) = y^{(n)}$,
potom diferenciálnu rovnicu symbolicky zapíšeme

$$V(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Ak v ODR vystupuje najviac n -tá derivácia neznámej funkcie $y^{(n)}$
a nevyskytuje sa v nej žiadna derivácia vyššieho rádu, nazývame ju
obyčajná diferenciálna rovnica rádu n .

V ODR n -tého rádu nemusia explicitne vystupovať derivácie funkcie
 $y = f(x)$ všetkých rádov nižších ako n , ani neznáma funkcia y ani
premenná x .

Riešením ODR n -tého rádu na neprázdnej množine $M \subset \mathbb{R}$ nazývame každú funkciu $y = \varphi(x)$, ktorá je definovaná na množine M , má na nej derivácie až do rádu n a pre každé $x \in M$ spĺňa danú rovnicu.

Riešiť diferenciálnu rovnicu znamená nájsť všetky funkcie, ktoré spĺňajú danú rovnicu a určiť množinu $M = (a, b) \subset \mathbb{R}$, na ktorej sú tieto riešenia definované, alebo ukázať, že daná rovnica nemá žiadne riešenie.

Pri riešení diferenciálnych rovníc rozoznávame nasledujúce druhy riešení:

1. Všeobecné riešenie

ktoré obsahuje toľko konštánt, akého rádu je rovnica

2. Partikulárne riešenie

ktoré vznikne zo všeobecného riešenia vhodnou voľbou konštánt, alebo hodnoty týchto konštánt získame zo začiatočných podmienok

3. Singulárne riešenie

je riešenie, ktoré neobsahuje žiadnu konštantu a nedá sa získať zo všeobecného riešenia

Metóda hľadania riešenia sa nazýva **integrovanie diferenciálnej rovnice**, funkcia, ktorá je riešením sa nazýva **integrál diferenciálnej rovnice** a graf riešenia diferenciálnej rovnice sa nazýva **integrálna krivka diferenciálnej rovnice**.

Dve diferenciálne rovnice sú **ekvivalentné**, ak každé riešenie jednej z rovníc je súčasne riešením druhej rovnice na tej istej množine.

Pri riešení diferenciálnych rovníc dané rovnice upravujeme:

1. ekvivalentnými úpravami

Pôvodná a upravená rovnica sú ekvivalentné, majú zhodné riešenia.

2. neekvivalentnými úpravami

Upravená rovnica môže mať viac alebo menej riešení ako pôvodná rovnica, prípadne sa môže zmeniť množina, na ktorej je riešenie definované. Riešenie je preto potrebné osobitne analyzovať.

Úloha nájsť partikulárne riešenie DR 1. rádu vyhovujúce
začiatočnej podmienke - **Cauchyho začiatočná podmienka**
 $y(x_0) = y_0$, kde x_0, y_0 sú dané čísla,
sa nazýva **Cauchyho začiatočná úloha**.

Geometrická interpretácia

hľadaná integrálna krivka prechádza bodom $Q = [x_0, y_0]$

Úloha nájsť partikulárne riešenie DR 2. rádu, ktoré vyhovuje
začiatočným podmienkam - **Cauchyho začiatočné**
podmienky: $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1$, kde x_0, y_0, y_1 sú dané čísla,
sa nazýva **Cauchyho začiatočná úloha**.

Geometrická interpretácia

hľadaná integrálna krivka prechádza bodom $Q = [x_0, y_0]$
a má v toto bode dotyčnicu so smernicou y_1