

ZÁKLADNÉ VETY DIFERENCIÁLNEHO POČTU

Fermatova veta

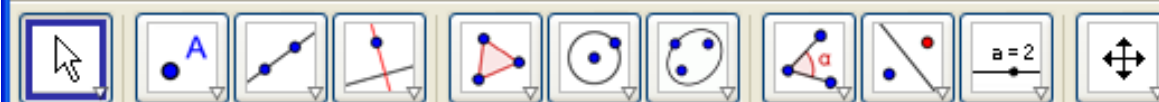
Ak funkcia f nadobúda v bode ξ minimálnu alebo maximálnu hodnotu a má v tomto bode deriváciu, potom $f'(\xi) = 0$.

Geometrická interpretácia

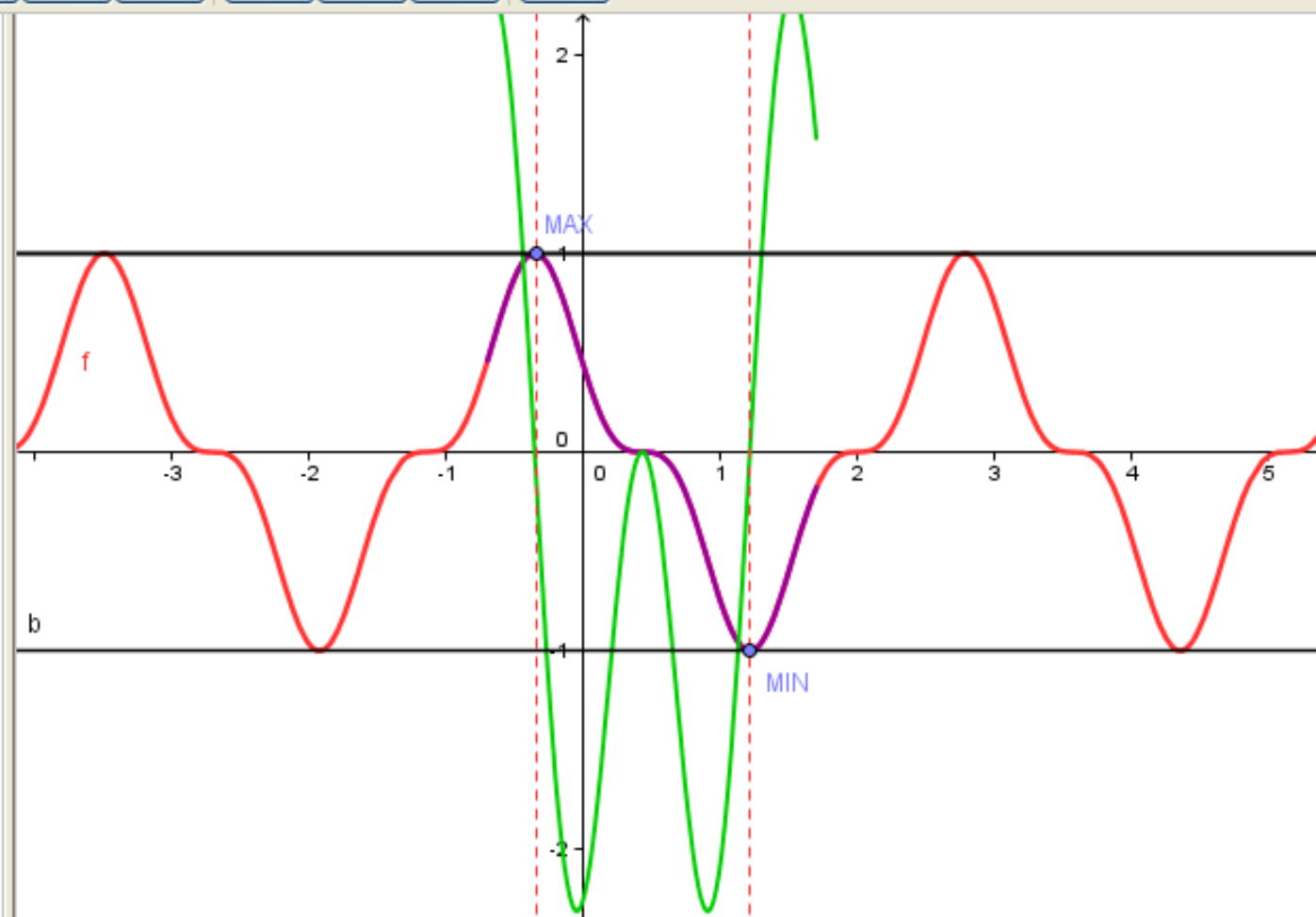
Graf funkcie $f(x)$ má v bode $[\xi, f(\xi)]$ dotyčnicu, ktorá je rovnobežná so súradnicovou osou x .

Smernica dotyčnice je nulová, jej rovnica má tvar

$$y = f(\xi)$$



- Free Objects
 - $f(x) = \sin(2x - 4)^2$
- Dependent Objects
 - $MAX = (-0.348, 1)$
 - $MIN = (1.218, -1)$
 - $b: y = -1$
 - $g(x) = 6 \cos(2x - 4) \sin(2x - 4)^2$
 - $h(x) = \sin(2x - 4)^2$
 - $i: x = -0.348$
 - $j: y = 1$
 - $k: x = 1.218$
 - $p(x) = 6 \cos(2x - 4) \sin(2x - 4)^2$



Dôsledok Fermatovej vety

Funkcia $f(x)$ môže nadobúdať extrémne hodnoty v takých bodoch $x \in D(f)$, v ktorých platí $f'(x) = 0$.

Tieto body nazývame **stacionárne body** funkcie.

Rolleho veta

Nech má funkcia f tieto vlastnosti:

1. je spojitá na uzavretom intervale $[a, b]$
2. v každom bode otvoreného intervalu (a, b) má deriváciu
3. platí $f(a) = f(b)$.

Potom existuje v intervale (a, b) aspoň jeden bod ξ taký, že platí $f'(\xi) = 0$.

Geometrická interpretácia

Spojitá funkcia $f(x)$ má na intervale $[a, b]$ monotónny priebeh. Keďže $f(a) = f(b)$, funkcia je na istých častiach intervalu rastúca a na iných častiach klesajúca, existuje teda aspoň jeden stacionárny bod funkcie, v ktorom nadobúda extrémnu hodnotu.



Move

Drag or select objects (Esc)

Free Objects

$f(x) = \sin(2x - 4)^2$

Dependent Objects

$A = (0, -0.207)$

$B = (-1.458, -0.207)$

$C = (0.746, -0.207)$

$D = (1.683, -0.207)$

$E = (3.887, -0.207)$

$F = (-2.396, -0.207)$

$G = (4.825, -0.207)$

$a: y = -0.207$

$b: x = -1.458$

$c: x = 0.746$

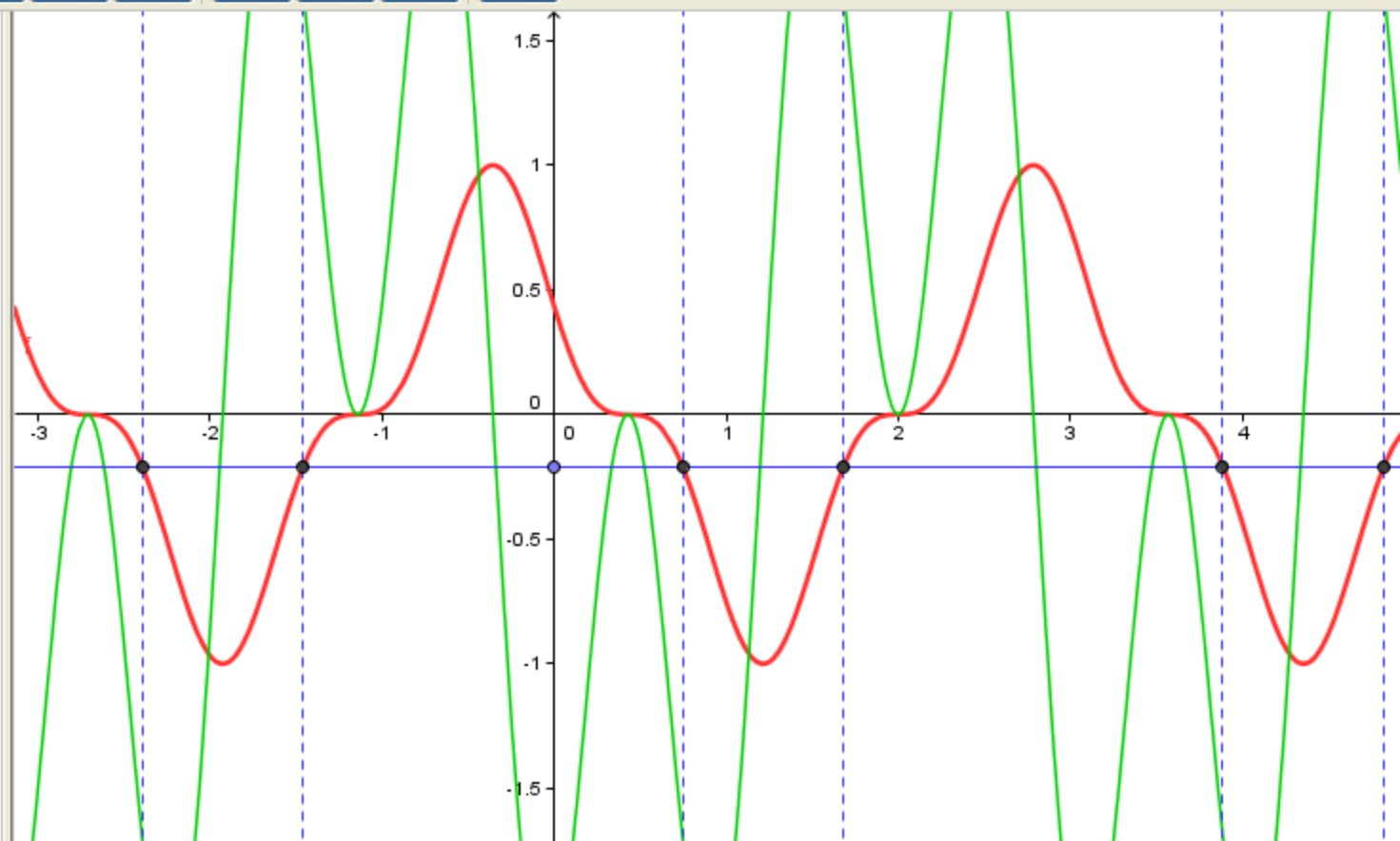
$d: x = 1.683$

$e: x = 3.887$

$g(x) = 6 \cos(2x - 4) \sin(2x - 4)^2$

$h: x = -2.396$

$i: x = 4.825$



Input:

Dôsledok

Smernica dotyčnice grafu funkcie je v istých častiach intervaloch definičného oboru funkcie kladná, v iných záporná, v bode $[\xi, f(\xi)]$ je dotyčnica rovnobežná so súradnicovou osou x a jej smernica je nulová, $f'(\xi) = 0$.

Znamienko prvej derivácie funkcie bude určovať intervaly oboru definície rôznych typov monotónnosti funkcie, teda jej rastúci alebo klesajúci priebeh.

Lagrangeova veta o prírastku funkcie

Nech má funkcia f tieto vlastnosti:

1. je spojitá na uzavretom intervale $[a, b]$
2. v každom bode otvoreného intervalu (a, b) má deriváciu.

Potom v intervale (a, b) existuje aspoň jeden bod ξ taký, že platí

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Geometrická interpretácia

Graf spojitej funkcie $f(x)$ má na $[a, b]$ dotyčnicu v každom okrem koncových bodov $A = [a, f(a)]$, $B = [b, f(b)]$.

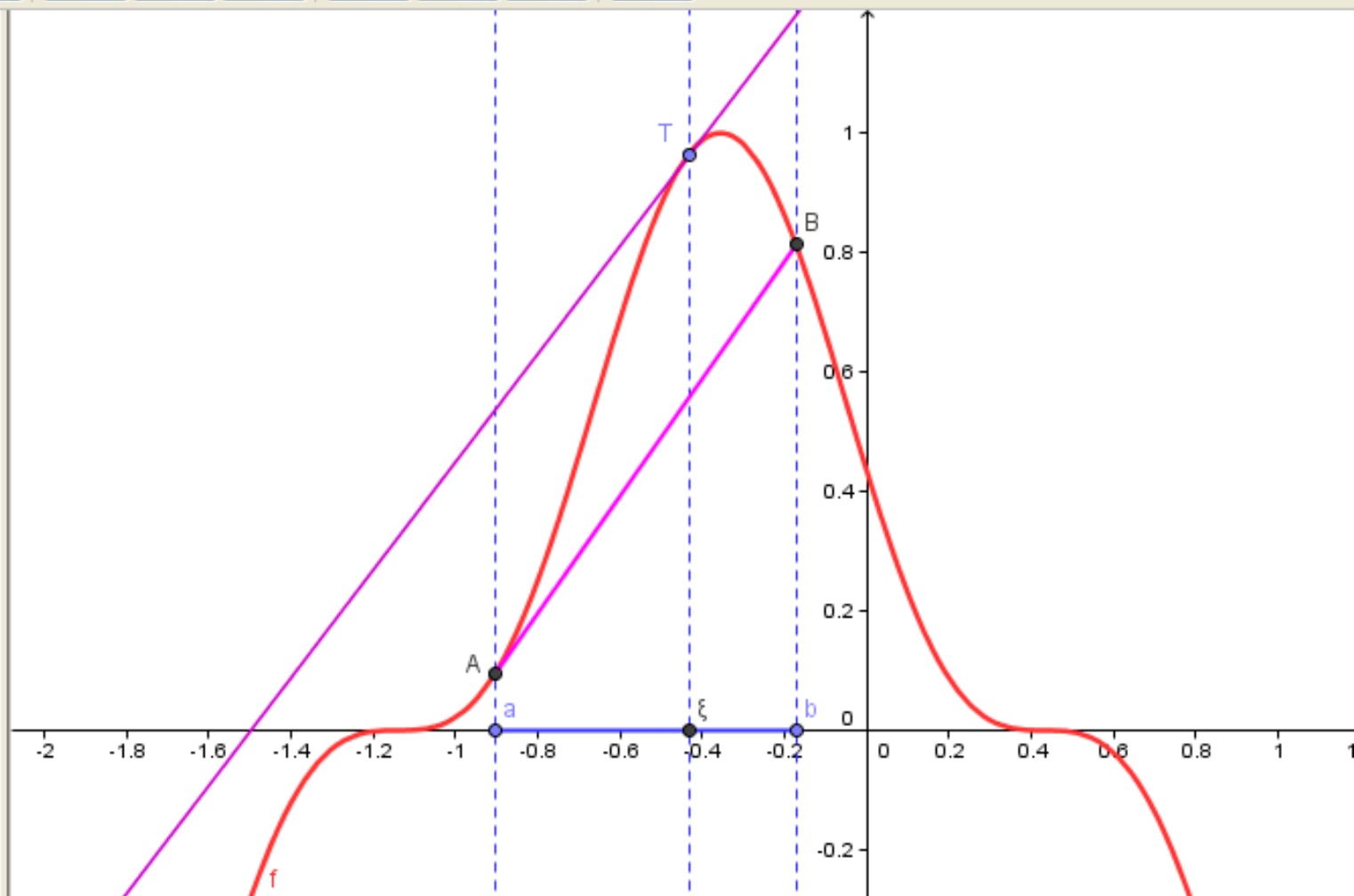
Na grafe funkcie existuje aspoň jeden bod $T = [\xi, f(\xi)]$ taký, že dotyčnica grafu v tomto bode je rovnobežná s úsečkou AB , ich smernice sú rovnaké

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Move
Drag or select objects (Esc)

- Free Objects
 - $f(x) = \sin(2x - 4)^3$
- Dependent Objects
 - $A = (-0.906, 0.094)$
 - $B = (-0.173, 0.814)$
 - $T = (-0.434, 0.964)$
 - $a = (-0.906, 0)$
 - $b = (-0.173, 0)$
 - $c: x = -0.906$
 - $d: x = -0.173$
 - $e = 0.733$
 - $g = 1.028$
 - $h: y = 0.905x + 1.357$
 - $i: x = -0.434$
 - $\xi = (-0.434, 0)$



Input:

Fyzikálna interpretácia

Funkcia $s = f(t)$ vyjadruje dráhu hmotného bodu pohybujúceho sa po priamke a jej derivácia $f'(t)$ určuje rýchlosť bodu v čase t . Priemerná rýchlosť v časovom intervale $\langle t_1, t_2 \rangle$ je vyjadrená podielom
$$\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Podľa L vety v tomto intervale existuje časový okamih ξ taký, že
$$f'(\xi) = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

teda okamžitá rýchlosť v čase ξ sa rovná priemernej rýchlosti.

Lagrangeova veta sa niekedy nazýva aj veta o strednej hodnote.

Ak je $f'(x) = 0$ pre každé $x \in (a, b)$, potom je funkcia $f(x)$ konštantná na celom intervale, teda $f(x) = c$, $c \in R$, pre $\forall x \in (a, b)$.

Dôsledok

Ak $f'(x) - g'(x) = 0$ pre $\forall x \in (a, b)$, potom $f(x) = g(x) + c$, $c \in R$, $x \in (a, b)$.