

URČITÝ INTEGRÁL

Nech $J = \langle a, b \rangle$ je uzavretý interval v množine $\mathbf{R}$.
Usporiadanú množinu bodov

$$D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}, \text{ kde } a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

nazývame delenie intervalu J .

Interval $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ nazývame i -ty čiastočný interval,
 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ je dĺžka čiastočného intervalu

$$\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle \Rightarrow f(\xi_i) \Rightarrow f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \Rightarrow \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

Určitý integrál

Nech je funkcia $f(x)$ ohraničená na intervale $J = \langle a, b \rangle$.

Ak pre ľubovoľný výber bodov ξ_i existuje tá istá vlastná limita

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

potom túto limitu nazývame určitý integrál funkcie $f(x)$ na intervale $J = \langle a, b \rangle$ a označujeme

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

Funkciu $f(x)$ nazývame integrovateľnou na intervale J .

Platia nasledujúce tvrdenia:

$$1. \quad \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$2. \quad \int_a^a f(x) dx = 0$$

Základné vlastnosti určitého integrálu

1. Ak je funkcia $f(x)$ spojitá na intervale $J = \langle a, b \rangle$, potom je na tomto intervale integrovateľná.
2. Ak je funkcia $f(x)$ ohraničená na intervale $J = \langle a, b \rangle$, pričom len v konečnom počte bodov tohto intervalu nie je spojitá, potom je na tomto intervale integrovateľná.

3. Ak sú funkcie $f(x)$ a $g(x)$ integrovateľné na intervale $J = \langle a, b \rangle$ a nech $c \in \langle a, b \rangle$, $k \in R$.

Potom platí:

$$\text{a) } \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$\text{b) } \int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx$$

$$\text{c) } \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

4. Ak pre každé $x \in \langle a, b \rangle$ platí $f(x) \geq 0$, potom

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

5. Ak pre každé $x \in \langle a, b \rangle$ platí $f(x) \leq g(x)$, potom

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

Výpočet určitého integrálu

Newton-Leibnizov vzorec

Nech sú funkcie $f(x)$ a $F(x)$ spojité na intervale $J = \langle a, b \rangle$ a nech je funkcia $F(x)$ primitívna funkcia k funkcii $f(x)$ na intervale (a, b) . Potom platí:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Základné integračné metódy

1. Metóda per partes

Nech $u(x)$ a $v(x)$ sú funkcie, ktoré majú na intervale J spojitú deriváciu $u'(x)$ a $v'(x)$.

Potom na intervale J platí

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Základné integračné metódy

2. Substitučná metóda

Ak sa integrovaná funkcia na intervale $\langle a, b \rangle$ dá vyjadriť v tvare $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$, kde $\varphi(x)$ a $\varphi'(x)$ sú spojité funkcie na intervale $\langle a, b \rangle$ a zároveň je funkcia $f(x)$ spojitá v každom bode

$t = \varphi(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$, potom platí

$$\int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt$$

Platia nasledujúce tvrdenia

1. Ak je $f(x)$ párna funkcia, potom

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

2. Ak je $f(x)$ nepárna funkcia, potom

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

Stredná hodnota funkcie na intervale

Ak je funkcia $f(x)$ integrovateľná na intervale $\langle a, b \rangle$, tak číslo

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

nazývame stredná hodnota funkcie $f(x)$ na intervale $\langle a, b \rangle$

Ak je $f(x)$ spojitá funkcia na intervale $\langle a, b \rangle$, potom existuje aspoň jedno číslo $c \in \langle a, b \rangle$ také, že platí

$$\mu = f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$