

# Systemy lineárních rovnic

## Systém rovníc

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

kde  $a_{ij}$ ,  $b_i$  pre  $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$

sú dané reálne čísla a

$x_1, x_2, \dots, x_n$  sú neznáme,

nazývame systém  $m$  lineárnych rovníc s  $n$  neznámymi.

Čísla  $a_{ij}$  sú koeficienty systému, čísla  $b_i$  absolútne členy.

Symbolicky môžeme systém lineárnych rovníc  
zapísať v maticovom tvare  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$   
pričom

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Maticu  $\mathbf{A}$  nazývame matica systému.

Systém rovníc nazývame

1. homogénny (bez pravej strany),  
ak  $b_i = 0$  pre všetky  $i = 1, 2, \dots, m$
2. nehomogénny (s pravou stranou),  
ak  $b_i \neq 0$  aspoň pre jedno  $i$ .

Riešením systému rovníc nazývame každú takú  $n$ -ticu (usporiadanú skupinu) reálnych čísel  $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ , ktoré po dosadení do systému za neznáme  $x_i$  v danom poradí utvoria  $m$  správnych číselných rovností.

Úloha riešiť daný systém rovníc predstavuje nasledujúce kroky – postup riešenia:

1. zistiť, či daný systém môže mať/má riešenie
2. určiť počet možných riešení systému
3. nájsť všetky riešenia systému.

- Systém  $m$  lineárnych rovníc s  $n$  neznámymi môže mať:
  1. práve jedno riešenie
  2. nekonečne veľa riešení
  3. žiadne riešenie
- Homogénny systém rovníc má vždy riešenie,  $n$ -ticu  $(0, 0, \dots, 0)$ , ktoré nazývame triviálne riešenie.
- Ak je  $m < n$ , homogénny systém lineárnych rovníc má nekonečne veľa riešení.

- Dva systémy lineárnych rovníc nazveme ekvivalentné, ak každé riešenie jedného z nich je riešením aj druhého.
  - Ekvivalentné úpravy systému rovníc sú také úpravy, ktoré nemenia množinu všetkých riešení daného systému.
1. Zmena poradia rovníc systému.
  2. Vynásobenie (vydelenie) ľubovoľnej rovnice systému nenulovým číslom  $c \neq 0$ .
  3. Pripočítanie nenulového násobku jednej rovnice (alebo násobkov viacerých rovníc) systému k inej (alebo k iným) rovniciam systému.
  4. Vynechanie rovnice, ktorá je násobkom inej rovnice (alebo kombináciou iných rovníc) systému.

# Gausova eliminačná metóda

Metóda riešenia systému lineárnych rovníc postupnou elimináciou neznámych.

Maticu systému **A**, resp. rozšírenú maticu systému

$$\mathbf{A}' = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

upravujeme ekvivalentnými úpravami na trojuholníkový tvar.

Každé riešenie systému rovníc určeného získanou trojuholníkovou maticou je riešením aj pôvodného systému.

**Frobeniova veta.** Systém nehomogénnych rovníc je riešiteľný vtedy a len vtedy, keď hodnosť matice systému sa rovná hodnosti rozšírenej matice systému.

Dôsledok 1. Ak  $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}') = n$  ( $n$  je počet neznámych), potom systém má práve jedno riešenie.

Dôsledok 2. Ak  $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}') < n$  ( $n$  je počet neznámych), potom systém má nekonečne veľa riešení a  $n - h$  neznámych možno ľubovoľne voliť.

Dôsledok 3. Ak  $h(\mathbf{A}) \neq h(\mathbf{A}')$ , potom systém nemá riešenie.