

SPOJITOST FUNKCIE

Funkcia f je v bode a spojitá, ak $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Platí:

1. $a \in D(f)$
2. $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Funkcia f je v bode a spojitá ZĽAVA, ak

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

Funkcia f je v bode a spojitá SPRAVA, ak

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

Funkcia f je spojitá na množine M , ak je spojitá v každom bode množiny M .

Funkcia f je spojitá na uzavretom intervale $\langle a, b \rangle$, ak je spojitá v každom bode otvoreného intervalu (a, b) a v bode a je spojitá sprava, v bode b je spojitá zľava.

Ak sú funkcie f a g spojité v bode a , tak sú v bode a spojité aj funkcie $f \pm g$ a $f \cdot g$.

Ak je $g(a) \neq 0$, potom je v bode a spojitá aj funkcia f / g .

Každá elementárna funkcia je spojitá na svojom definičnom obore.

Body, v ktorých funkcia f nie je spojitá nazývame **body nespojitosti funkcie**.

V týchto bodoch funkcia:

1. nie je definovaná, ale má limitu

2. nemá limitu $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$

3. je definovaná a má limitu, ale táto sa nerovná hodnote funkcie.

Vlastnosti spojitých funkcí na uzavretom intervale

1. Funkcia f spojitá na uzavretom intervale je na tomto intervale ohraničená.

2. Nech je funkcia f spojitá na uzavretom intervale $\langle a, b \rangle$, potom funkcia f nadobúda na tomto intervale svoju maximálnu aj minimálnu hodnotu, platí

$\exists c_1, c_2 \in \langle a, b \rangle$ také, že

$$f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2) \forall x \in \langle a, b \rangle$$

3. Nech je funkcia f spojitá na uzavretom intervale $\langle a, b \rangle$ a nech $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Potom existuje $c \in \langle a, b \rangle$, pre ktoré platí
$$f(c) = 0.$$

4. Ak je funkcia f spojitá na uzavretom intervale $\langle a, b \rangle$ a nie je konštantná, potom obrazom intervalu $\langle a, b \rangle$ je tiež uzavretý interval $\langle c, d \rangle$.

Asymptoty grafu funkcie

Priamka $y = k \cdot x + q$ sa nazýva asymptota so smernicou grafu funkcie $f(x)$ pre $x \rightarrow \infty$, alebo pre $x \rightarrow -\infty$, ak platí

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \quad q = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - k \cdot x),$$

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \quad q = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - k \cdot x)$$

Priamka $x = a$ sa nazýva asymptota bez smernice grafu funkcie $f(x)$, ak je aspoň jedna jednostranná limita funkcie v bode a nevlastná, teda platí jeden zo vzťahov:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

Priamka $x = a$ je asymptotou bez smernice grafu funkcie $f(x)$, ak je funkcia f definovaná v ľavom, resp. v pravom okolí bodu a a v bode a nie je spojitá.