

Číselné rady

Číselné rady

Nech je daná postupnosť reálnych čísel

$$\{a_n\} = a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

Výraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

sa nazýva nekonečný číselný rad, číslo a_n je n -tým členom radu.

Číslo

$$s_n = \sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n, n = 1, 2, \dots$$

sa nazýva n -tý čiastočný súčet nekonečného číselného radu.

Číselný rad **konverguje**, ak postupnosť $\{s_n\}$ jeho čiastočných súčtov má vlastnú limitu $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$

a číslo s nazývame súčet nekonečného číselného radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$

Ak postupnosť $\{s_n\}$ nemá vlastnú limitu, hovoríme, že rad je divergentný.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + \dots + n + \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2} = \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^n + \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \text{neexistuje}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$$

Nutná podmienka konverencie radu

Ak je rad konvergentný, potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

Ak uvedená podmienka neplatí, rad je nutne divergentný.

Majorantný rad k nekonečnému číselnému radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je nekonečný číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, ak pre jeho členy platí, že pre každé n

$$b_n \geq |a_n|.$$

Kritériá konverencie

Pravidlá na určovanie konverencie (divergencie) nekonečných radov

1. Porovnávacie kritérium

- Ak k číselnému radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ existuje konvergentný majorantný číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, potom je aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentný.
- Ak je číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentný, potom je divergentný aj každý k nemu majorantný číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Ak predpokladáme konvergenciu daného radu, hľadáme k nemu majorantný konvergentný rad (najčastejšie sa používa vhodný geometrický rad).

Ak naopak predpokladáme divergenciu radu, hľadáme divergentný rad, ku ktorému je daný rad majorantný (používa sa harmonický rad, alebo nejaká jeho modifikácia).

Hovoríme, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolútne konvergentný, ak je konvergentný aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$; ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje, rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je relatívne konvergentný.

2. D´Alambertovo (podielové) kritérium

Ak pre rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lambda$, potom

- pre $\lambda > 1$, rad diverguje
- pre $\lambda < 1$, rad absolútne konverguje
- pre $\lambda = 1$, o konvergencii (divergencii) nevieme rozhodnúť.

3. Cauchyho (odmocninové) kritérium

Ak pre rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda$, potom

- pre $\lambda > 1$, rad diverguje
- pre $\lambda < 1$, rad absolútne konverguje
- pre $\lambda = 1$, o konvergencii (divergencii) nevieme rozhodnúť.

Rady so striedavými znamienkami

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots, \forall n, a_n > 0 \ (a_n < 0)$$

Leibnizovo kritérium

Ak pre všetky prirodzené n platí $0 < a_{n+1} \leq a_n$, potom rad so striedavými

znamienkami $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ konverguje práve vtedy, ak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.