

POSTUPNOSTI

Zobrazenie f množiny prirodzených čísel do ľubovoľnej množiny nazývame (nekonečná) postupnosť.

Platí

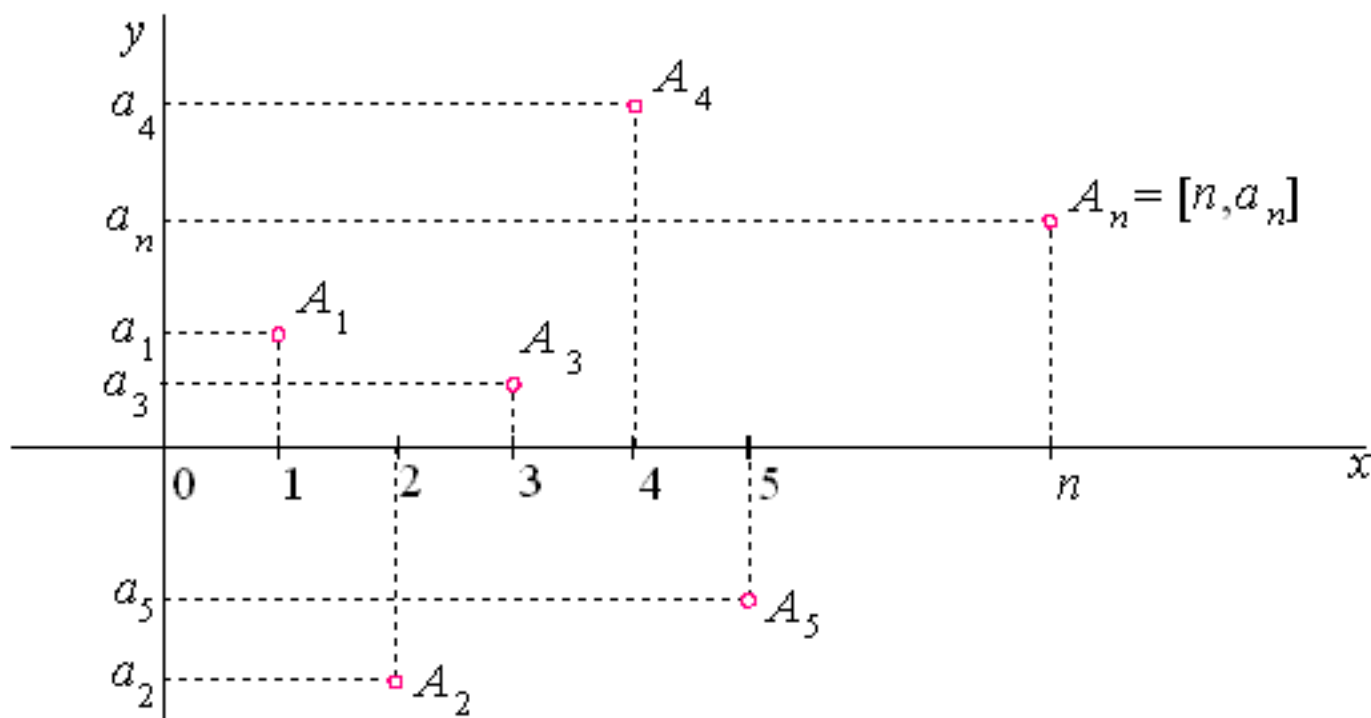
- $f(1) = a_1, f(2) = a_2, \dots, f(n) = a_n, \dots$
- Prvok $a_n = f(n)$ sa nazýva n -tý člen postupnosti.
- Postupnosť je jednoznačne určená svojimi členmi, označuje sa zápisom

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

- Členy postupnosti $\{a_n\}$ môžu byť prvky ľubovoľnej množiny, keď sú to čísla, postupnosť nazývame číselná postupnosť alebo postupnosť čísel.

Číselná postupnosť je funkcia definovaná na množine všetkých prirodzených čísel, jej grafom je množina izolovaných bodov roviny.

$$\{A_n = [n, a_n], n \in N, a_n \in R\}$$



Vlastnosti postupnosti

Postupnosť $\{a_n\}$ je

- rastúca $\Leftrightarrow \forall n \in N$ platí $a_n < a_{n+1}$
- neklesajúca $\Leftrightarrow \forall n \in N$ platí $a_n \leq a_{n+1}$
- klesajúca $\Leftrightarrow \forall n \in N$ platí $a_n > a_{n+1}$
- nerastúca $\Leftrightarrow \forall n \in N$ platí $a_n \geq a_{n+1}$

Rastúca, neklesajúca, klesajúca alebo nerastúca postupnosť sa nazýva monotónna postupnosť.

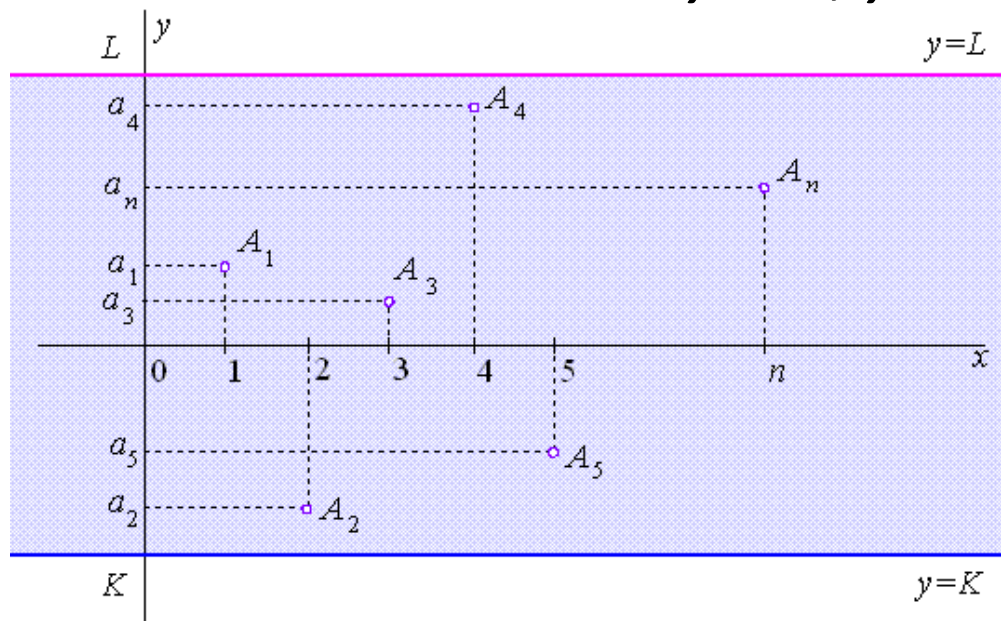
Rastúca alebo klesajúca postupnosť sa nazýva rýdzo monotónna postupnosť.

Postupnosť $\{a_n\}$ je

- zdola ohraničená $\Leftrightarrow \exists K \in R: \forall n \in N$ platí $K < a_n$
- zhora ohraničená $\Leftrightarrow \exists L \in R: \forall n \in N$ platí $a_n < L$

Postupnosť ohraničená zhora aj zdola sa nazýva ohraničená postupnosť.

Všetky bodu grafu ohraničenej postupnosti ležia v páse určenom rovnobežkami s rovnicami $y = K$, $y = L$.



Číslo a sa nazýva limita postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ak ku každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje také číslo n_0 , že pre všetky prirodzené čísla $n > n_0$ platí

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Skutočnosť, že číslo a je limitou postupnosti $\{a_n\}$ zapisujeme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

Pomocou kvantifikátorov stručne zapíšeme uvedenú definíciu limity postupnosti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : \forall n > n_0, n \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon$$

Postupnosť, ktorá má limitu, sa nazýva **konvergentná**.

Postupnosť, ktorá nemá limitu, sa nazýva **divergentná**.

Ak má postupnosť $\{a_n\}$ limitu a , hovoríme, že postupnosť konverguje k číslu a .

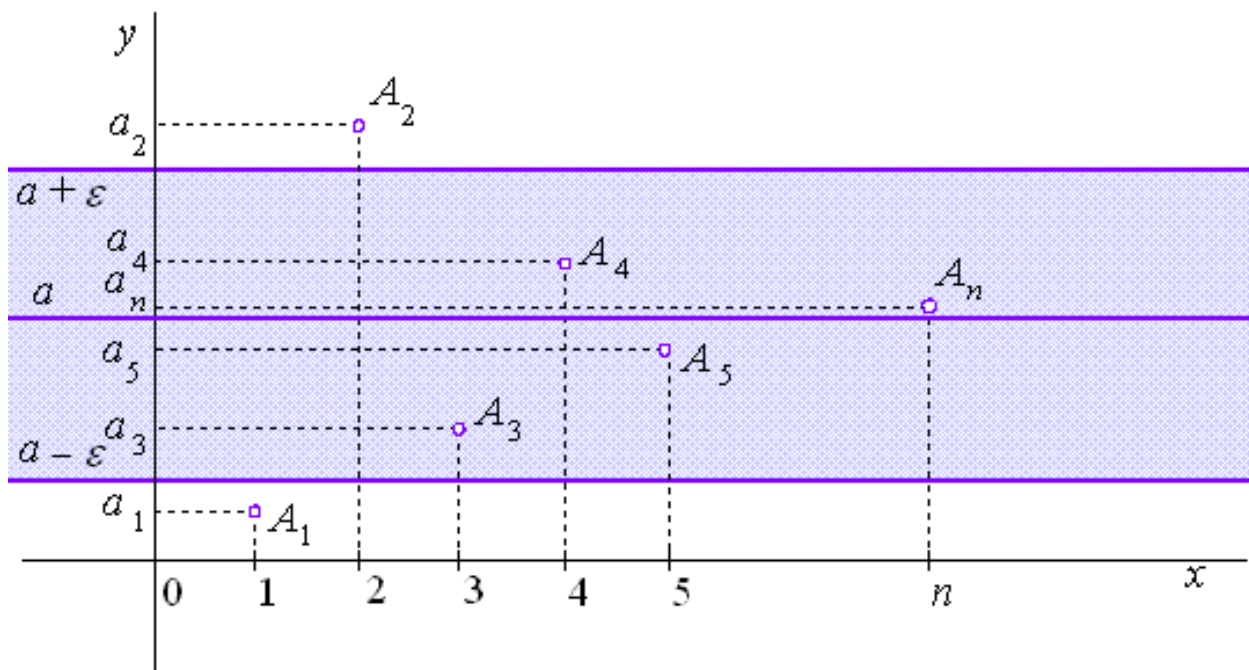
Platí:

1. Každá konvergentná postupnosť má len jednu limitu.
2. Každá konvergentná postupnosť je ohraničená.

Limita a graf postupnosti

Geometrická interpretácia konverencie postupnosti

body A_n grafu (až na konečný počet) sa nachádzajú v páse určenom rovnobežkami s osou x , ktoré prechádzajú bodmi $[0, a - \varepsilon]$ a $[0, a + \varepsilon]$ na osi y .



$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

Číslo a sa nazýva limita postupnosti $\{a_n\}$, ak v každom okolí $O_\varepsilon(a)$ ležia takmer všetky členy tejto postupnosti.

Vlastnosť členov konvergentnej postupnosti "nachádzať sa v blízkosti čísla, ktoré je označené ako limita postupnosti" platí pre takmer všetky členy konvergentnej postupnosti až na ich konečný počet.

Číslo a sa nazýva limita postupnosti $\{a_n\}$, ak pre každé číslo $\varepsilon > 0$ a pre takmer všetky členy tejto postupnosti platí $|a_n - a| < \varepsilon$.

Počet tých členov postupnosti, pre ktoré neplatí $|a_n - a| < \varepsilon$ závisí od voľby čísla ε . Ak číslo ε znižujeme, počet takýchto členov postupnosti sa zväčšuje, pri každom ε je však tento počet konečný.

Vybraná postupnosť a jej konvergencia

Nech je daná postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$
a nech je $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ rastúca postupnosť
prirodzených čísel.

Postupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva
vybraná postupnosť z postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$
pomocou postupnosti $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Vybraná postupnosť a jej konvergencia

Nech je postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentná a má limitu rovnajúcu sa číslu a .

Potom každá z nej vybraná postupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná a má limitu rovnajúcu sa a .

Postupnosť, z ktorej možno vybrať divergentnú postupnosť, je tiež divergentná.

Postupnosť, z ktorej možno vybrať dve konvergentné postupnosti majúce rôzne limity, je divergentná.

Limita troch postupností

Nech $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = l$

a nech pre každé prirodzené číslo n platí

$$a_n \leq b_n \leq c_n ,$$

potom aj

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l .$$

Nech sú dané postupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$, potom postupnosti

- $\{a_n + b_n\}$, $\{a_n - b_n\}$, $\{a_n \cdot b_n\}$, $\{a_n/b_n\}$

nazývame postupne súčet, rozdiel, súčin a podiel (pre všetky $b_n \neq 0$) postupností.

Ak sú postupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ konvergentné, potom sú konvergentné aj postupnosti

- $\{ka_n\}$, $k \in R$, $\{a_n + b_n\}$, $\{a_n - b_n\}$, $\{a_n \cdot b_n\}$.

Ak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, tak

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} k a_n = k a$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$

e) ak je $b_n \neq 0$ pre všetky $n \in N$ a $b \neq 0$, tak je aj postupnosť $\{a_n/b_n\}$ konvergentná a platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{a}{b}$$

Nech $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ a nech je pre každé

prirodzené číslo n definované $a_n^{b_n}$

Potom existuje aj limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^{b_n}) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = a^b$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Postupnosť $\{a_n\}$ má nevlastnú limitu ∞ / $-\infty$,
ak v každom okolí $O_A(\infty)$ / $O_A(-\infty)$ ležia takmer
všetky členy postupnosti $\{a_n\}$,
teda ak ku každému číslu A existuje také číslo n_0 ,
že pre každé $n > n_0$ je $a_n > A$ / $a_n < A$.

Zapisujeme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \Leftrightarrow (\forall A \exists n_0 : \forall n > n_0 : a_n > A)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow (\forall A \exists n_0 : \forall n > n_0 : a_n < A)$$

Pre danú postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

môžu nastať nasledujúce prípady:

- postupnosť má vlastnú limitu, je konvergentná

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

- postupnosť má nevlastnú limitu, je divergentná

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm \infty$$

- neexistuje ani vlastná ani nevlastná limita, postupnosť je oscilujúca.

Pravidlá pre počítanie limity
súčtu, rozdielu, súčinu, podielu
a mocniny dvoch postupností
platia aj pre nevlastné limity za predpokladu,
že všetky výrazy, ktoré sa v nich vyskytujú,
sú definované.

Pre výpočty s nevlastnými limitami postupností používame nasledujúce pravidlá, $c \in R$

Súčet a rozdiel $\infty + \infty = \infty$

$$-\infty - \infty = -\infty$$

$$c + \infty = \infty$$

$$c - \infty = -\infty$$

Súčin $\infty \cdot \infty = \infty$

$$-\infty \cdot \infty = -\infty$$

$$c \cdot \infty = \begin{cases} \infty, & c > 0 \\ -\infty, & c < 0 \end{cases}$$

$$c \in R$$

Podiel

$$\frac{c}{\infty} = 0$$

$$\frac{c}{-\infty} = 0$$

Mocnina

$$\infty^{\infty} = \infty$$

$$\infty^{-\infty} = 0$$

$$\infty^c = \begin{cases} \infty, c > 0 \\ 0, c < 0 \end{cases}$$

$$c^{\infty} = \begin{cases} 0, c \in \langle 0, 1 \rangle \\ \infty, c > 1 \end{cases}$$

Počítanie limít vedie niekedy ku neurčitým
(nedefinovaným) výrazom

$$\pm \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$$

Nech $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$

potom $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$

Pravidlá pre výpočet limity podielu dvoch polynómov premennej n , $P(n)/Q(n)$:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = 0$ ak je stupeň polynómu $P(n)$ menší ako stupeň polynómu $Q(n)$.
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \pm\infty$ ak je stupeň polynómu $P(n)$ väčší ako stupeň polynómu $Q(n)$, pričom znamienko závisí od koeficienta pri najvyššej mocnine n v oboch polynómov $P(n)$ a $Q(n)$.
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{p}{q}$ ak sú stupne oboch polynómov $P(n)$ a $Q(n)$ rovnaké, a čísla p, q sú koeficienty pri najvyšších mocninách n v polynómoch $P(n)$ a $Q(n)$.