NEVLASTNÉ INTEGRÁLY

Nevlastný integrál na neohraničenom intervale (vplyvom hornej hranice)

Nech je funkcia $f(x)$ definovaná na intervale $\langle a, \infty)$ a integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$ pre každé $b > a$.

Ak existuje vlastná limita

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx = \int_a^\infty f(x)dx$$

potom túto limitu nazývame nevlastný integrál funkcie $f(x)$ na intervale $\langle a, \infty)$.

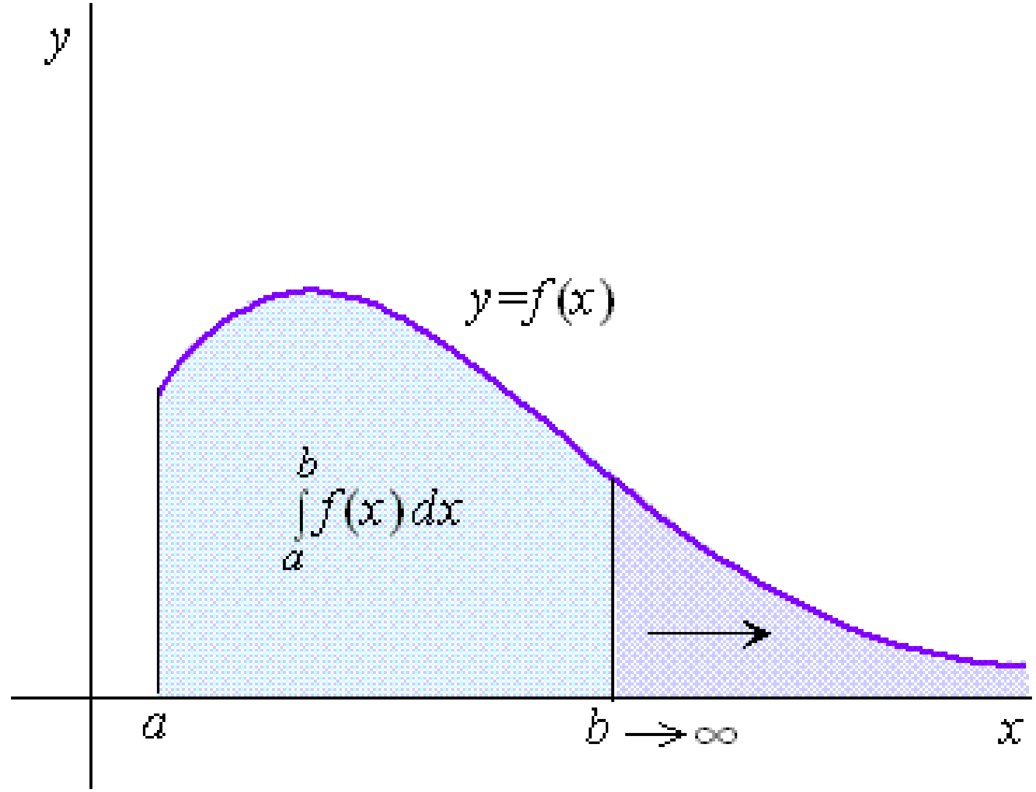
Ak vlastná limita existuje, hovoríme, že nevlastný integrál konverguje.

Ak vlastná limita neexistuje, príslušný nevlastný integrál diverguje.

Ak je funkcia *f*(*x*) spojitá a nezáporná na intervale $\langle a, \infty)$, potom pre ľubovoľné $b > a$ určuje nevlastný integrál

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx = \int_a^\infty f(x)dx$$

obsah krivočiareho lichobežníka.



Ak tento nevlastný integrál konverguje pre $b \to \infty$, jeho hodnotu považujeme za obsah nekonečnej rovinnej oblasti ohraničenej zhora grafom funkcie *f*(*x*), zdola súradnicovou osou *x* a zľava priamkou $x = a$.

Nevlastný integrál na neohraničenom intervale (vplyvom dolnej hranice)

Nech je funkcia $f(x)$ definovaná na intervale $(-\infty, b\rangle$ a integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$ pre každé $a < b$.

Ak existuje vlastná limita

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx = \int_{-\infty}^b f(x)dx$$

potom túto limitu nazývame nevlastný integrál funkcie $f(x)$ na intervale $(-\infty, b\rangle$.

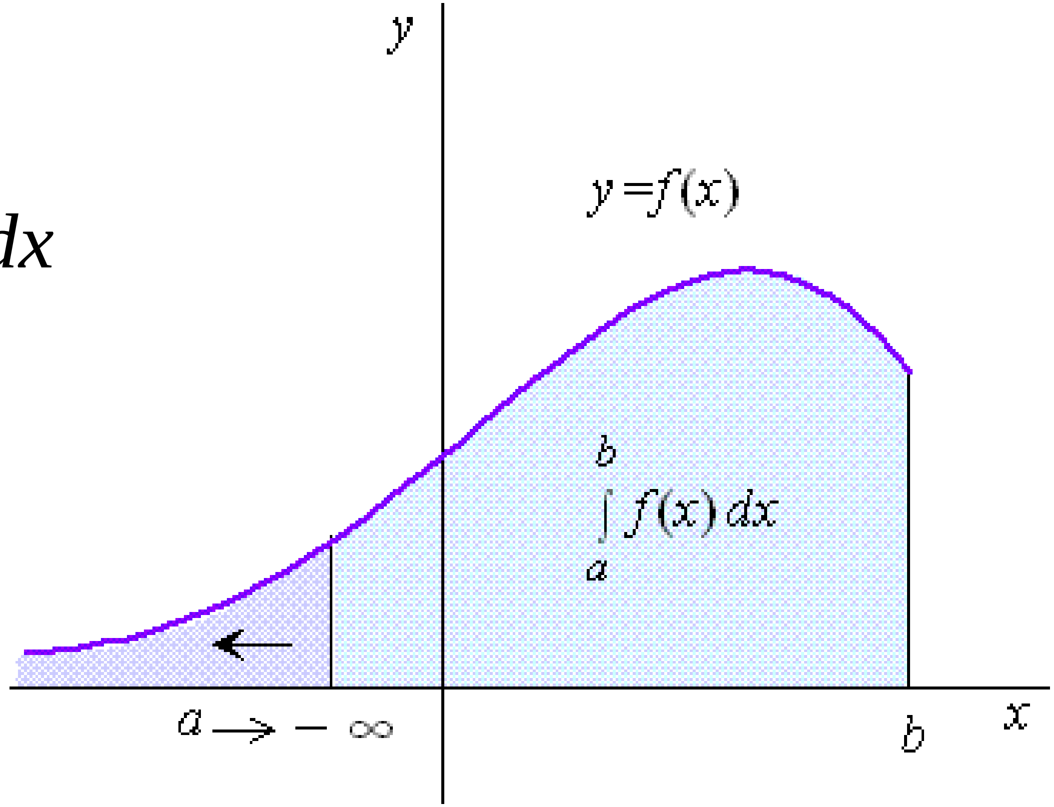
Ak vlastná limita existuje, hovoríme, že nevlastný integrál konverguje.

Ak vlastná limita neexistuje, príslušný nevlastný integrál diverguje.

Ak je funkcia *f*(*x*) spojitá a nezáporná na intervale $(-\infty, b\rangle$, potom pre ľubovoľné $a < b$
určuje nevlastný integrál

$$\lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx = \int_{-\infty}^b f(x)dx$$

obsah
krivočiareho lichobežníka.



Ak tento nevlastný integrál konverguje pre $a \to -\infty$, jeho hodnotu považujeme za obsah nekonečnej rovinnej oblasti ohraničenej zhora grafom funkcie *f*(*x*), zdola súradnicovou osou *x* a zprava priamkou $x = b$.

Nevlastný integrál na neohraničenom intervale

Nech je funkcia *f*(*x*) definovaná na intervale (- ∞, ∞) a nech *c* je ľubovoľné reálne číslo.

Ak existujú nevlastné integrály

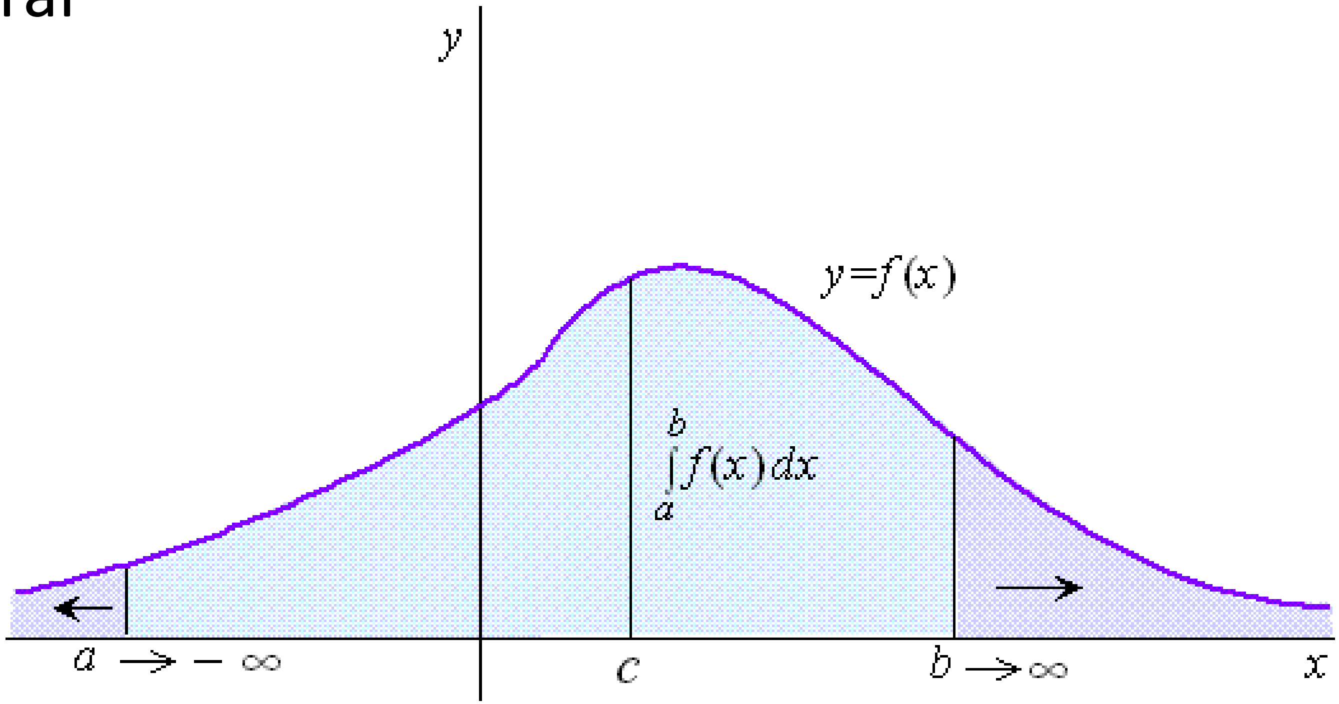
$$\int_{-\infty}^{c} f(x)dx \qquad \int_{c}^{\infty} f(x)dx$$

potom ich súčet nazývame nevlastný integrál funkcie *f*(*x*) na intervale (-∞, ∞).

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx, c \in R$$

Ak aspoň jeden z nevlastných integrálov $\int_{-\infty}^{c} f(x)dx, \int_{c}^{\infty} f(x)dx$ diverguje, potom diverguje aj nevlastný integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$



Ak je funkcia *f*(*x*) spojitá a nezáporná na intervale (- ∞, ∞), a nevlastný integrál konverguje, jeho hodnotu považujeme za obsah nekonečnej rovinnej oblasti ohraničenej zhora grafom funkcie *f*(*x*) a zdola súradnicovou osou *x*.

Nevlastný integrál z neohraničenej funkcie (vplyvom funkcie)

Nech je funkcia $f(x)$ definovaná na intervale $\langle a, b)$ a v okolí bodu b je neohraničená

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty$$

Ak je integrovateľná na každom intervale

$\langle a, b - \varepsilon \rangle$, pre $\varepsilon > 0$, $b - \varepsilon > a$

a existuje vlastná limita

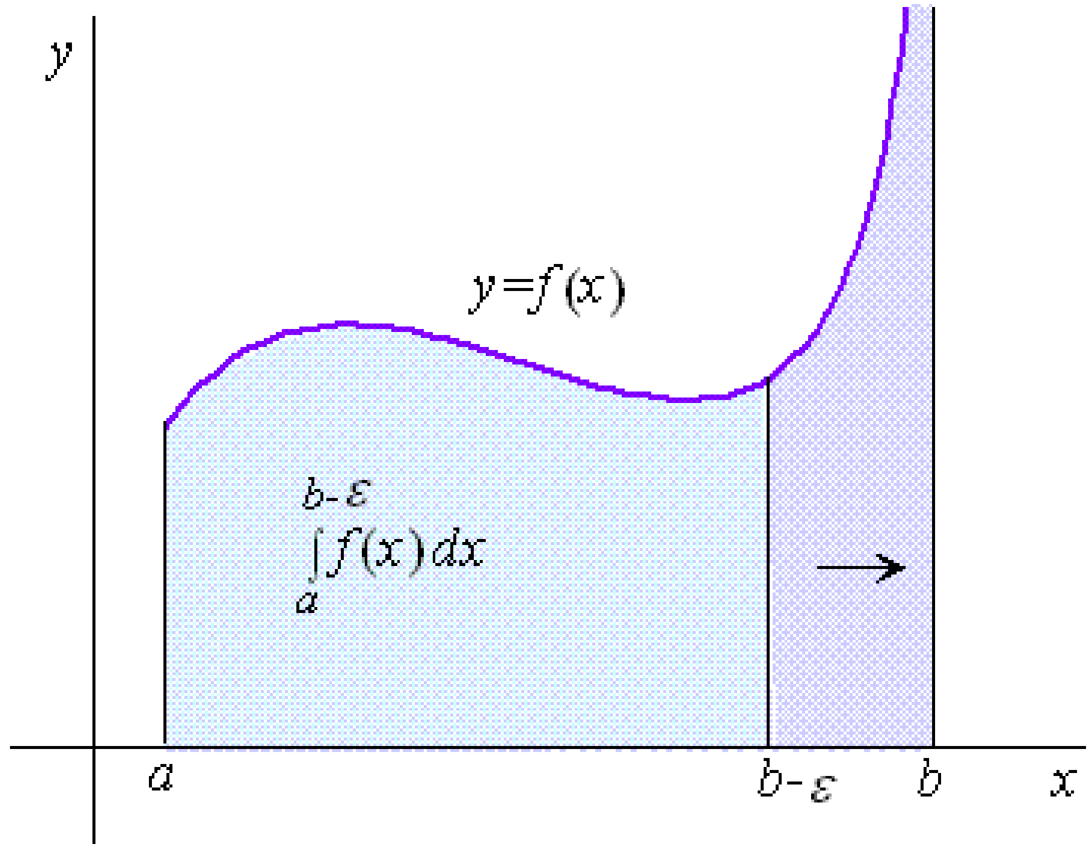
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

potom túto limitu nazývame nevlastný integrál vplyvom funkcie $f(x)$ na intervale $\langle a, b \rangle$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Ak je funkcia *f*(*x*) spojitá a nezáporná na intervale $\langle a, b)$, potom nevlastný integrál

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$



považujeme za obsah nekonečnej rovinnej oblasti ohraničenej zhora grafom funkcie *f*(*x*), zdola súradnicovou osou *x* a zľava priamkou *x* = *a*.

Nevlastný integrál z neohraničenej funkcie (vplyvom funkcie)

Nech je funkcia $f(x)$ definovaná na intervale $(a, b\rangle$ a v okolí bodu a je neohraničená

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$$

Ak je integrovateľná na každom intervale

$\langle a + \varepsilon, b\rangle$, pre $\varepsilon > 0$, $a + \varepsilon < b$

a existuje vlastná limita

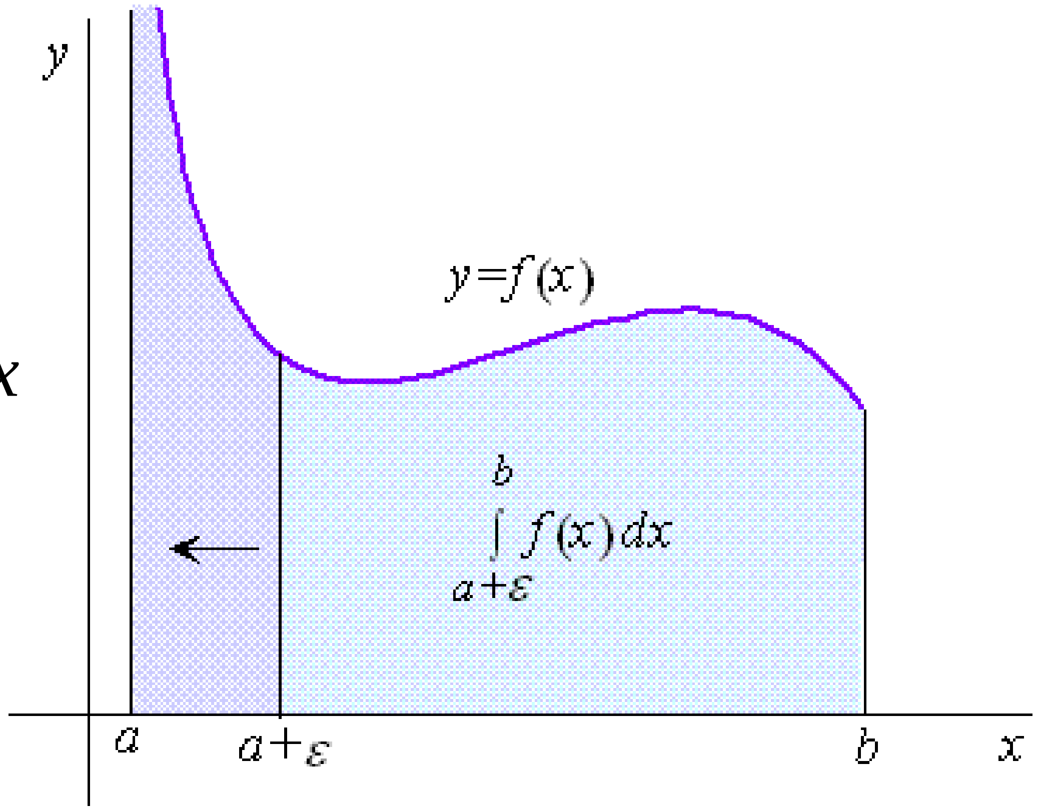
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

potom túto limitu nazývame nevlastný integrál vplyvom funkcie $f(x)$ na intervale $\langle a, b\rangle$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

Ak je funkcia *f*(*x*) spojitá a nezáporná na intervale $(a, b\rangle$, potom nevlastný integrál

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx$$



považujeme za obsah nekonečnej rovinnej oblasti ohraničenej zhora grafom funkcie *f*(*x*), zdola súradnicovou osou *x* a sprava priamkou *x* = *b*.

Nevlastný integrál z neohraničenej funkcie (vplyvom funkcie)

Nech je funkcia *f*(*x*) definovaná na intervale (*a*, *b*) a nech je neohraničená iba v okolí bodu *a* a v okolí bodu *b*. Nech *c* je ľubovoľné číslo z intervalu (*a*, *b*).

Ak existujú nevlastné integrály

$$\int_a^c f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^c f(x)dx, \quad \int_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_c^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

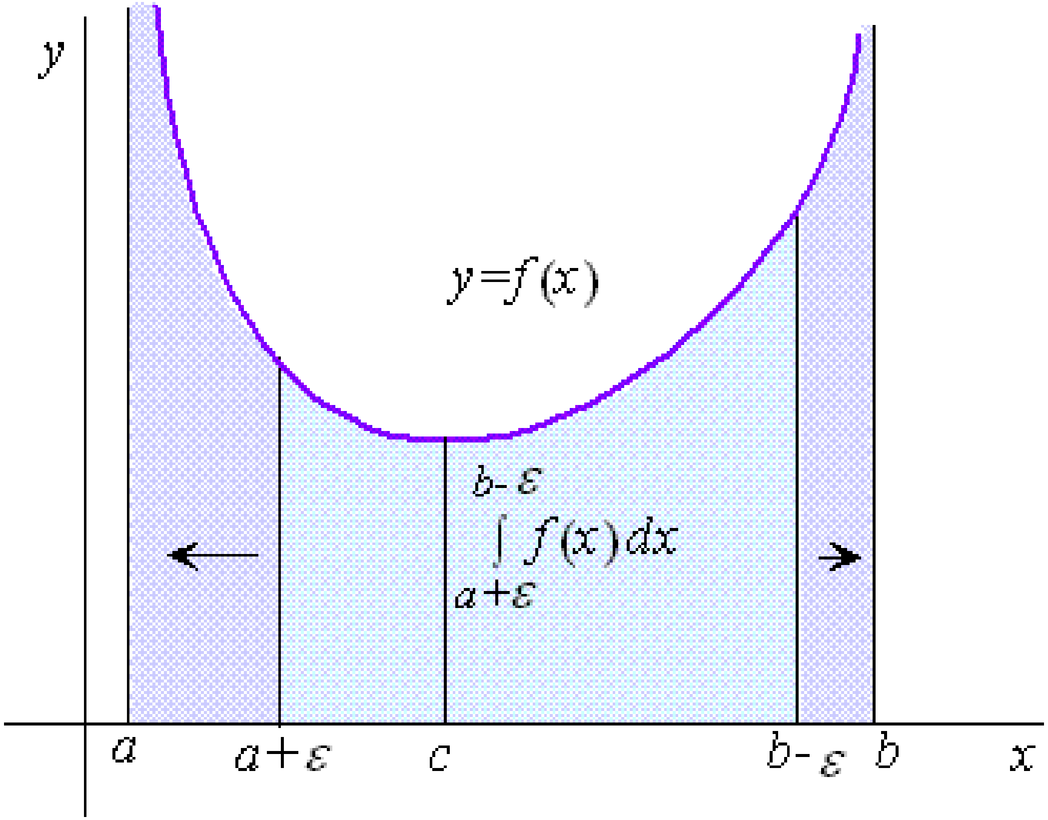
potom ich súčet nazývame nevlastný integrál funkcie *f*(*x*) na intervale $\langle a, b \rangle$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Ak je funkcia *f*(*x*) spojitá a nezáporná na intervale (*a*, *b*), potom nevlastný integrál

$$\int_a^c f(x)dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)dx$$



považujeme za obsah nekonečnej rovinnej oblasti ohraničenej zhora grafom funkcie *f*(*x*), zdola súradnicovou osou *x*, zľava priamkou *x* = *a* a sprava priamkou *x* = *b*.

Nevlastný integrál z neohraničenej funkcie

Nech funkcia $f(x)$ nie je ohraničená v istom okolí bodu $c \in (a, b)$ a na každom intervale

$\langle a, c-\varepsilon \rangle$ aj $\langle c+\varepsilon, b \rangle$, kde $\varepsilon > 0$, $c-\varepsilon > a$, $c+\varepsilon < b$

je integrovateľná.

Ak existujú oba integrály

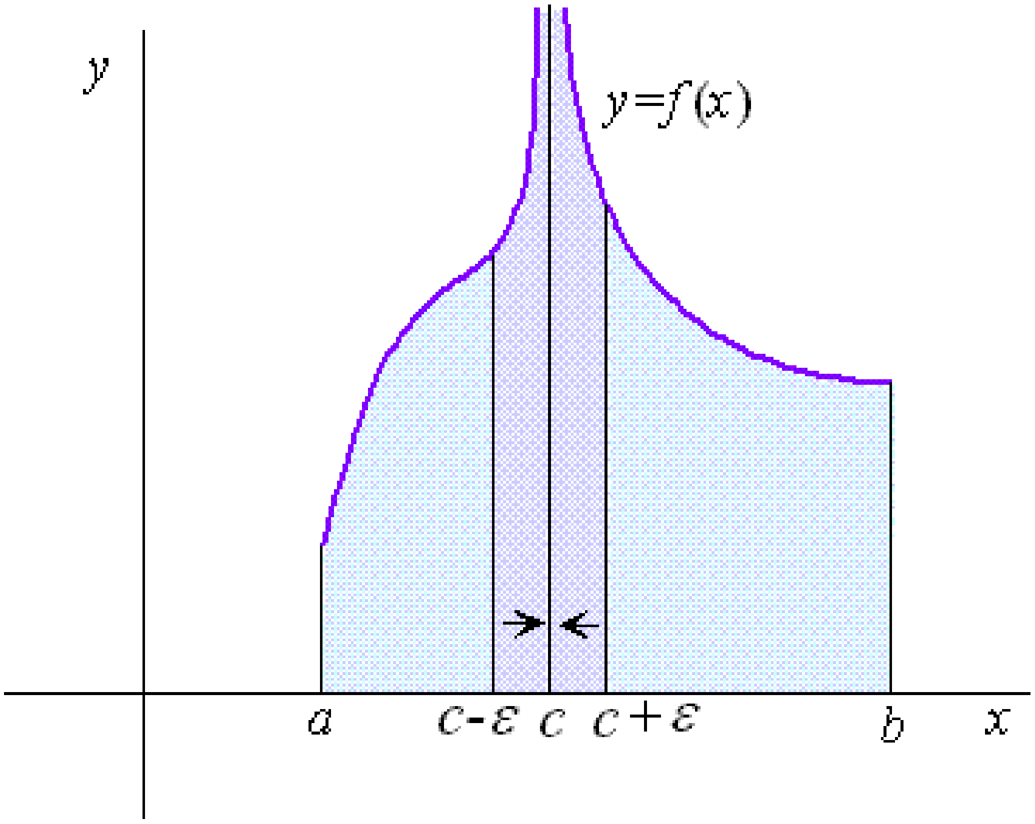
$$\int_a^c f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx, \quad \int_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx$$

potom ich súčet nazývame nevlastným integrálom funkcie $f(x)$ na intervale $\langle a, b \rangle$ a označujeme

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Ak je funkcia $f(x)$ spojitá a nezáporná na intervale $\langle a, b \rangle$ - až na jeden bod nespojitosti $c \in (a, b)$, potom nevlastný integrál

$$\int_a^b f(x)dx$$



považujeme za obsah nekonečnej rovinnej oblasti ohraničenej zhora grafom funkcie $f(x)$, zdola súradnicovou osou x, zľava priamkou $x = a$ a sprava priamkou $x = b$.

NEVLASTNÉ INTEGRÁLY

I. Vplyvom hranice – na intervale

a) $\langle a, \infty)$

b) $(-\infty, b\rangle$

c) $(-\infty, \infty)$

II. Vplyvom funkcie – neohraničenej

a) v bode b

b) v bode a

c) v bodoch a aj b

d) v bode $c \in (a, b)$