

MONOTÓNNOST EXTRÉMY FUNKCIE

Nech je funkcia f spojitá na intervale $J \subset \mathbb{R}$ a nech má v každom vnútornom bode intervalu deriváciu f' .

Funkcia f je na intervale J rastúca (klesajúca) práve vtedy, ak pre každé x z vnútra intervalu platí

$$f'(x) \geq 0 \text{ (} f'(x) \leq 0 \text{),}$$

pričom rovnosť môže platiť iba v bodoch, ktoré netvoria interval $J_1 \subset J$.

Lokálne extrémny

Nech je funkcia $f(x)$ definovaná v bode x_0 .

Funkčná hodnota $f(x_0)$ sa nazýva lokálne maximum (minimum) funkcie f , ak existuje také okolie

$O(x_0) \subset D(f)$ bodu x_0 , že pre každé $x \in O(x_0)$ platí $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$).

Ak pre $\forall x \in O(x_0), x \neq x_0$ platí $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$), hovoríme o ostrom lokálnom maxime (minime) funkcie.

Lokálne maximum a lokálne minimum sa spoločne nazývajú lokálne extrémny.

Bod, v ktorom funkcia nadobúda lokálny extrém sa nazýva bod lokálneho extrému.

Nutná podmienka existencie lokálneho extrému

Ak má funkcia f v bode x_0 lokálny extrém a má v tomto bode deriváciu f' , potom $f'(x_0) = 0$.

Dôsledok

Spojité funkcia $f(x)$ môže nadobúdať lokálny extrém buď v stacionárnom bode, v ktorom je prvá derivácia funkcie nulová, alebo v bode, v ktorom prvá derivácia funkcie neexistuje.

Tieto body nazývame kritické body prvej derivácie funkcie.

Postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému

Nech je funkcia f spojitá v bode x_0 .

Ak existuje také ľavé okolie bodu x_0 , v ktorom

pre $\forall x \in O^-(x_0)$ platí $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$)

a také pravé okolie bodu x_0 , v ktorom

pre $\forall x \in O^+(x_0)$ platí $f'(x) < 0$ ($f'(x) > 0$),

tak funkcia f nadobúda v bode x_0 ostré lokálne maximum (minimum).

Nech $f'(x_0) = 0$ a $f''(x_0) \neq 0$. Potom má funkcia f v bode x_0 ostrý lokálny extrém, a to

ostré lokálne maximum, ak je $f''(x_0) < 0$

ostré lokálne minimum, ak je $f''(x_0) > 0$.

Určovanie lokálnych extrémov

1. Nájdenie kritických bodov prvej derivácie
2. Použitie postačujúcich podmienok na určenie lokálnych extrémov

Globálne extrémy

Nech je funkcia f definovaná na intervale J a nech $x_0 \in J$. Funkčná hodnota $f(x_0)$ sa nazýva globálne maximum (minimum) funkcie f na intervale J , ak pre každé $x \in J$ platí $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$).

Globálne maximum a globálne minimum sa spolu nazývajú globálne extrémy.

Určovanie globálnych extrémov spojitej funkcie na uzavretom intervale $[a, b]$

1. Nájdenie kritických bodov na otvorenom intervale (a, b) – množina $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$
2. Vytvorenie množiny funkčných hodnôt
 $FH = \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a), f(b)\}$
3. $\max f(x) = \max FH, \min f(x) = \min FH$