Matice
a operácie s maticami

Matica

Nech m, n sú prirodzené čísla.
Matica je schéma zostavená z počtu $m.n$ čísel a_{ik},
kde i = 1, 2, ..., m, k = 1, 2, ..., n (nezávisle sa meniace indexy),
utvorená ich usporiadaním do m riadkov a n stĺpcov.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ik})$$

Skupina čísel (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}) sa nazýva i-ty riadok matice.
Sú to prvky matice, ktoré majú rovnaký prvý index, sú zapísané v jednom, i-tom riadku schémy.
Skupina čísel (a_{1k}, a_{2k}, , ..., a_{mk}) sa nazýva k-ty stĺpec matice.
Sú to prvky matice, ktoré majú rovnaký druhý index, sú zapísané v jednom, k-tom stĺpci schémy.

Každý riadok alebo stĺpec matice možno považovať za vektor.

Matica

Matica, ktorá má m riadkov a n stĺpcov, sa nazýva matica typu m x n.
Pre $m \neq n$ má matica obdĺžnikový tvar, hovoríme o obdĺžnikovej matici.

Ak je matica typu n x n, teda počet riadkov matice sa rovná počtu jej stĺpcov, hovoríme o štvorcovej matici stupňa (rádu) n.

Prvky štvorcovej matice, ktorých riadkový aj stĺpcový index sú rovnaké, teda ležia na jednej z uhlopriečok tejto štvorcovej schémy, nazývame diagonálne prvky.
Vektor $(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$ nazývame hlavná diagonála matice,
vektor $(a_{n1}, ..., a_{1n})$ nazývame vedľajšia diagonála matice.

Štvorcová matica, ktorej všetky prvky okrem prvkov hlavnej diagonály sa rovnajú nule, sa nazýva diagonálna matica.

Diagonálna matica stupňa n, ktorej prvky na hlavnej diagonále sa všetky rovnajú číslu 1, sa nazýva jednotková matica (stupňa n), označujeme $\boldsymbol{E}$.

Matica

Matica typu m x n, ktorej všetky prvky sú nulové, sa nazýva nulová matica, označujeme ju $\boldsymbol{0}$.

Nech $\boldsymbol{A} = (a_{ik})$ je matica typu m x n. Matica $\boldsymbol{A}^T = (a'_{ki})$ typu n x m, pre ktorej prvky platí

$$a'_{ki} = a_{ik}\ ,\ i = 1, 2, ..., m, \quad k = 1, 2, ..., n$$

sa nazýva transponovaná matica k matici $\boldsymbol{A}$, označujeme aj $\boldsymbol{A}^T$.

Matica $\boldsymbol{A}'$ vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ zámenou riadkov za stĺpce,
teda riadky matice $\boldsymbol{A}'$ sú stĺpce matice $\boldsymbol{A}$
a stĺpce matice $\boldsymbol{A}'$ sú riadky matice $\boldsymbol{A}$.

Ak je matica $\boldsymbol{A}$ štvorcová, jej transponovaná matica $\boldsymbol{A}^T$ je tiež štvorcová matica, vznikne z $\boldsymbol{A}$ preklopením okolo hlavnej diagonály.

Diagonálna matica stupňa n sa rovná svojej transponovanej matici.

Operácie s maticami

1. Rovnosť matíc

Matice $\boldsymbol{A} = (a_{ik})$ a $\boldsymbol{B} = (b_{ik})$ považujeme za rovnajúce sa, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$, vtedy a len vtedy, keď sú rovnakého typu m x n a platí

$$a_{ik} = b_{ik}\ , \ i = 1, 2, ..., m, \quad k = 1, 2, ..., n$$

2. Súčet dvoch matíc

Nech $\boldsymbol{A} = (a_{ik})$ a $\boldsymbol{B} = (b_{ik})$ sú matice rovnakého typu m x n.
Maticu $\boldsymbol{C} = (c_{ik})$ typu m x n, pre ktorej prvky c_{ik} platí

$$c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}\ , \ i = 1, 2, ..., m, \quad k = 1, 2, ..., n$$

nazývame súčtom matíc $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ a píšeme $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$.

Súčet nie je definovaný pre matice, ktoré nie sú rovnakého typu.
$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{A}$ pre ľubovoľnú maticu $\boldsymbol{A}$ a nulovú maticu $\boldsymbol{0}$, obe typu m x n.
Súčtom dvoch diagonálnych matíc je opäť diagonálna matica.

Operácie s maticami

3. Násobenie matice číslom

Nech $\boldsymbol{A} = (a_{ik})$ je matica typu m x n a nech c je číslo.
Maticu $\boldsymbol{B} = (b_{ik})$ typu m x n, pre ktorej prvky b_{ik} platí

$$b_{ik} = c \,.\, a_{ik}\,,\; i = 1, 2, \ldots, m, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

nazveme súčinom čísla c a matice $\boldsymbol{A}$ a píšeme $\boldsymbol{B} = c.\,\boldsymbol{A}$.

4. Súčin dvoch matíc

Nech $\boldsymbol{A} = (a_{ik})$ je matica typu m x n a $\boldsymbol{B} = (b_{ik})$ je matica typu n x p.
Maticu $\boldsymbol{C} = (c_{ik})$ typu m x p, pre ktorej prvky c_{ik} platí

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \,.\, b_{jk}\,,\; i = 1, 2, \ldots, m, \quad k = 1, 2, \ldots, p$$

nazývame súčinom matíc $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ (v uvedenom poradí)
a píšeme $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \,.\, \boldsymbol{B}$.

Súčin nie je definovaný pre také dve matice, ktorých počet stĺpcov prvej sa nerovná počtu riadkov druhej matice.

Operácie s maticami

Dva riadky matice nazveme lineárne závislé, ak je jeden číselným násobkom druhého riadku.

Maticu nazveme regulárnou maticou, ak neobsahuje žiadne lineárne závislé (a teda ani žiadne nenulové) riadky.

Počet lineárne nezávislých riadkov matice nazývame hodnosť matice.

Ak je $\boldsymbol{A}$ štvorcová matica n-tého stupňa a $\boldsymbol{E}$ je jednotková matica tiež n-tého stupňa, potom matica $\boldsymbol{A}^{-1}$, pre ktorú platí

$$\boldsymbol{A} \,.\, \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} \,.\, \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$$

sa nazýva matica inverzná k matici $\boldsymbol{A}$.

Ku každej regulárnej štvorcovej matici $\boldsymbol{A}$ existuje inverzná matica $\boldsymbol{A}^{-1}$.

Operácie s maticami

Ak je $\boldsymbol{A}$ štvorcová matica n-tého stupňa
a $\boldsymbol{E}$ je jednotková matica tiež n-tého stupňa,
potom platí

$$\boldsymbol{A} \,.\, \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E} \,.\, \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$$

Jednotková matica $\boldsymbol{E}$ má pri násobení štvorcových matíc tú istú úlohu
ako číslo 1 pri násobení čísel.

Súčin dvoch matíc $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ nie je komutatívny,
ani v prípade štvorcových matíc, $\boldsymbol{A} \,.\, \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B} \,.\, \boldsymbol{A}$.

Súčinom dvoch diagonálnych matíc je opäť diagonálna matica.

Súčin dvoch matíc $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ môže byť nulová matica i v tom prípade,
ak sú obe matice nenulové.

Operácie s maticami

Pre operácie s maticami platia nasledujúce pravidlá:

1. $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$
2. $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})$
3. $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{A}$
4. $c\,(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = c\boldsymbol{A} + c\boldsymbol{B}$
5. $(c + d)\,\boldsymbol{A} = c\boldsymbol{A} + d\boldsymbol{A}$
6. $c\,(\boldsymbol{A} \,.\, \boldsymbol{B}) = (c\boldsymbol{A}) \,.\, \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \,.\, (c\boldsymbol{B})$
7. $(\boldsymbol{A} \,.\, \boldsymbol{B}) \,.\, \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \,.\, (\boldsymbol{B} \,.\, \boldsymbol{C})$
8. $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \,.\, \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \,.\, \boldsymbol{C} + \boldsymbol{B} \,.\, \boldsymbol{C}$
9. $\boldsymbol{A} \,.\, (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \,.\, \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \,.\, \boldsymbol{C}$
10. $\boldsymbol{A} \,.\, \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E} \,.\, \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$
11. $\boldsymbol{0} \,.\, \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \,.\, \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$