

INTEGROVANIE ŠPECIÁLNYCH TYPOV FUNKCIÍ

Integrovanie niektorých racionálnych funkcií

$$1. \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c, a > 0$$

$$2. \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + c, a > 0$$

$$3. \int \frac{x}{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{2} \ln |x^2 \pm a^2| + c, a > 0$$

$$4. \int \frac{ax + b}{x^2 + px + q} dx$$

a) Doplníme menovateľa na úplný štvorec

b) Substitúciou

$$t = x + \frac{p}{2}$$

úpravou funkcie dostaneme niektorý z predchádzajúcich typov integrálov 1.- 3.

alebo integrál typu

$$\int \frac{1}{x^2} dx$$

$$5. \int \frac{P(x)}{x^2 + px + q} dx$$

kde $P(x)$ je polynóm aspoň druhého stupňa.

Vydelíme čitateľa menovateľom a dostaneme polynóm $Q(x)$ a racionálnu funkciu, ktorú integrujeme ako v prípade 4.

$$\frac{P(x)}{x^2 + px + q} = Q(x) + \frac{ax + b}{x^2 + px + q}$$

Integrovanie niektorých iracionálnych funkcií

1. Ak integrovaná funkcia obsahuje výraz

$$\sqrt[n]{ax + b}, a \neq 0$$

použijeme substitúciu

$$t = \sqrt[n]{ax + b}$$

$$2. \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + c, a > 0$$

$$3. \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + c,$$

$$4. \int \frac{1}{\sqrt{Ax^2 + Bx + C}} dx, A \neq 0$$

Doplníme menovateľa na úplný štvorec a upravíme na niektorý z predchádzajúcich typov integrálov 2.- 3.

Integrovanie niektorých goniometrických funkcií

$$1. \int f(\sin x) \cos x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int f(t) dt$$

$$2. \int f(\cos x) \sin x dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right| = -\int f(t) dt$$

$$3. \int \sin^2 x dx \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$4. \int \cos^2 x dx \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Niektoré intregály sa nedajú vyjadriť pomocou známych elementárnych funkcií , nazývame ich eliptické (hypereliptické) intregály

$$\int e^{-x^2} dx, \int \frac{e^x}{x} dx, \int \frac{1}{\ln x} dx$$

$$\int \frac{\sin x}{x} dx, \int \frac{\cos x}{x} dx$$