

NEURČITÝ INTEGRÁL

Nech $J = (a, b)$ je otvorený interval v množine $\mathbf{R}$.

Funkcia $F(x)$ sa nazýva

primitívna funkcia k funkcii $f(x)$ na intervale J
práve vtedy, ak pre každé x z intervalu J platí

$$F'(x) = f(x).$$

Platia nasledujúce tvrdenia:

1. Ak je funkcia $F(x)$ primitívnou funkciou k funkcii $f(x)$ na intervale J , potom aj funkcia $F(x) + c$ je primitívnou funkciou k funkcii $f(x)$ na intervale J pre ľubovoľné reálne číslo c .

2. Nech sú funkcie $F(x)$ a $G(x)$ primitívnymi funkciami k funkcii $f(x)$ na intervale J . Potom existuje také reálne číslo c , že pre každé x z intervalu J platí

$$G(x) = F(x) + c$$

3. Ak je funkcia $f(x)$ spojitá na intervale J , potom k nej existuje na intervale J primitívna funkcia.

Neurčitý integrál

Množinu všetkých primitívnych funkcií k funkcii $f(x)$ na intervale J nazývame neurčitý integrál funkcie $f(x)$ a označujeme

$$\int f(x)dx$$

Postup , pri ktorom hľadáme primitívnu funkciu k funkcii $f(x)$ nazývame **integrovanie**.

Ak $\forall x \in J : F'(x) = f(x) \Rightarrow$

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \forall x \in J, c \in R$$

Reálne číslo c sa nazýva integračná konštanta, integrovaná funkcia je integrand, výraz dx vymedzuje integračnú premennú.

Platia nasledujúce tvrdenia:

1. $\int f'(x)dx = f(x) + c, \forall x \in J, c \in R$

2. $[\int f(x)dx]' = f(x), \forall x \in J$

Základné vzorce integrovania

$$1. \int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \neq -1, \alpha \in R$$

$$2. \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$3. \int e^x dx = e^x + c$$

$$4. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, a > 0, a \neq 1$$

$$5. \int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$6. \int \cos x dx = \sin x + c$$

$$7. \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c$$

$$8. \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cot} g x + c$$

$$9. \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + c, a > 0$$

$$10. \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x + c$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + c, a > 0$$

$$11. \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + c$$

$$12. \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c$$

Všetky vzorce platia na ľubovoľnom otvorenom intervale $J = (a, b)$, ktorý je podmnožinou definičného oboru funkcie, ktorú integrujeme.

Základné vlastnosti neurčitého integrálu

Ak majú funkcie $f(x)$ a $g(x)$ neurčité integrály (primitívne funkcie) na intervale J , potom majú aj funkcie $f(x) \pm g(x)$ a $k \cdot f(x)$, $k \in \mathbf{R}$ neurčité integrály na intervale J a platí:

$$1. \quad \int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$2. \quad \int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$$

Základné integračné metódy

1. Metóda per partes

Nech $u(x)$ a $v(x)$ sú funkcie, ktoré majú na intervale J spojité derivácie $u'(x)$ a $v'(x)$.

Potom na intervale J platí

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

Základné integračné metódy

2. Substitučná metóda

Nech $F(t)$ je primitívna funkcia k funkcii $f(t)$ na intervale (a, b) . Nech funkcia $\varphi(x)$ má na intervale (α, β) spojitú deriváciu $\varphi'(x)$ a nech pre každé $x \in (\alpha, \beta)$ je $\varphi(x) \in (a, b)$. Potom platí

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = F(\varphi(x)) + c, x \in (\alpha, \beta)$$

Symbolický zápis

1.

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = \left| \begin{array}{l} t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x) dx \end{array} \right| =$$
$$= \int f(t) dt = F(t) + c = F(\varphi(x)) + c, x \in (\alpha, \beta)$$

2.

$$\int f(x) dx = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) dt \end{array} \right| =$$
$$= \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = F(t) + c = F(\varphi^{-1}(x)) + c$$

ak existuje $\varphi^{-1}(x)$.