

FUNKCIE jednej premennej

Pojem funkcie

Reálna funkcia f jednej premennej je zobrazenie množiny M , ktorá je časťou množiny reálnych čísel R , do množiny R .

Funkcia f je predpis, podľa ktorého každému reálnemu číslu x z množiny $M \subset R$ priradíme práve jedno reálne číslo $y = f(x)$.

$$f : M \rightarrow R, x \mapsto y = f(x)$$

Číslo $x \in M$ je nezávisle premenná - argument funkcie,
číslo $y \in M$ je závisle premenná - hodnota funkcie.

Množina $M = D(f)$ sa nazýva oblasť (obor) definície funkcie,
funkcia je definovaná na množine M .

Množina všetkých hodnôt funkcie je obor hodnôt $H(f)$.

Rôzne definície funkcie

- **predpis $y = f(x)$**

$D(f)$ je množina všetkých reálnych čísel, pre ktoré má výraz $f(x)$ zmysel.

- **tabuľka hodnôt**

Dané sú hodnoty funkcie v niektorých významných hodnotách premennej x

- **slovný opis priradenia**
- **graf**

Graf funkcie

Množina všetkých bodov $[x, y]$ v rovine s danou karteziánskou súradnicovou sústavou Oxy , pre ktoré platí $x \in D(f)$ a $y = f(x)$ sa nazýva graf funkcie $f(x)$.

$$G(f) = \{[x, y] \in R^2 : x \in D(f) \wedge y = f(x)\}$$

Krivka prechádzajúca bodmi $[x, f(x)]$

Operácie s funkciami

1. Absolútna hodnota funkcie

$$f : M \rightarrow R, x \mapsto f(x)$$

je funkcia $h(x)$

$$h : M \rightarrow R_0^+, x \mapsto h(x)$$

definovaná na M a taká, že pre všetky $x \in M$ je

$$h(x) = |f(x)|$$

Operácie s funkciami

2. Súčin reálneho čísla k a funkcie

$$f : M \rightarrow R, x \mapsto f(x)$$

je funkcia $h(x)$

$$h : M \rightarrow R, x \mapsto h(x)$$

definovaná na M tak, že pre všetky $x \in M$ a $k \in R$

$$h(x) = k \cdot f(x)$$

Rovnosť funkcií

3. Funkcie $f(x)$ a $g(x)$ sa rovnajú práve vtedy, keď sú definované na tej istej množine reálnych čísel $D(f) = D(g)$ a pre každé x z tohto definičného oboru platí

$$f(x) = g(x)$$

Súčet, rozdiel a súčin dvoch funkcií

4. Nech sú dané funkcie

$f(x)$ definovaná na množine $M_1 \subset R$

a $g(x)$ definovaná na množine $M_2 \subset R$.

Funkciu $h(x)$, ktorej definičným oborom je množina $M = M_1 \cap M_2$ nazývame

- súčet funkcií, ak pre každé $x \in M$ platí

$$h(x) = f(x) + g(x)$$

- rozdiel funkcií, ak pre každé $x \in M$ platí

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

- súčin funkcií, ak pre každé $x \in M$ platí

$$h(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Podiel dvoch funkcií

5. Nech sú dané funkcie

$f(x)$ definovaná na množine $M_1 \subset R$

a $g(x)$ definovaná na množine $M_2 \subset R$.

Nech $M \subset M_1 \cap M_2$ je množina takých reálnych čísel, pre ktoré platí $g(x) \neq 0$.

Funkciu $h(x)$, ktorej definičným oborom je množina M nazývame

- podielom funkcií, ak pre každé $x \in M$ platí

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Zložená funkcia

Funkcia $h(x) = (f \circ g)(x)$ sa nazýva zložená funkcia z funkcií $f(x)$ a $g(x)$ práve vtedy, keď definičný obor M funkcie $h(x)$ je množina všetkých tých čísel z oboru definície $D(g)$ funkcie $g(x)$, v ktorých je hodnota funkcie $g(x)$ číslo z oboru definície $D(f)$ funkcie $f(x)$ a pre každé číslo $x \in M$ platí

$$h(x) = f[g(x)]$$

Hodnota funkcie $h(x)$ v čísle x sa rovná hodnote funkcie $f(u)$ v čísle $u = g(x)$.

Funkcia $f(u)$ je hlavná zložka, funkcia $u = g(x)$ je vedľajšia zložka zloženej funkcie $h(x)$.

Prostá funkcia

Funkcia $f(x)$ definovaná na množine $D(f)$ sa nazýva prostá, alebo jedno-jednoznačná, keď pre každé dve čísla x_1, x_2 z $D(f)$ platí:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Inverzná funkcia

Nech je funkcia $f(x)$ definovaná na množine $D(f)$ a jej obor hodnôt je množina $H(f)$.

Funkcia $f^{-1}(x)$ definovaná na množine $H(f)$, ktorej obor hodnôt je množina $D(f)$ sa nazýva inverzná funkcia k funkcii $f(x)$, ak pre každé číslo b z $H(f)$ platí:

$$f^{-1}(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b$$

Grafy inverzných funkcií $f(x)$ a $f^{-1}(x)$ sú súmerné podľa priamky $x = y$.

Ohraničená funkcia

Funkcia $f(x)$ definovaná na množine $D(f)$ je ohraničená (zhora ohraničená, zdola ohraničená) práve vtedy, keď existujú reálne čísla d, h také, že pre všetky x z $D(f)$ platí:

$$d \leq f(x) \leq h \quad (f(x) \leq h, f(x) \geq d)$$

Funkcia, ktorá nie je ohraničená sa nazýva neohraničená.

Monotónne funkcia

Funkcia $f(x)$ definovaná na množine M sa nazýva rastúca, ak

$$\forall x_1, x_2 \in M, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

klesajúca, ak

$$\forall x_1, x_2 \in M, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

neklesajúca, ak

$$\forall x_1, x_2 \in M, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

nerastúca, ak

$$\forall x_1, x_2 \in M, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

Uvedené funkcie nazývame monotónne funkcie na M , klesajúce a rastúce funkcie nazývame rýdzomonotónne.

Párna a nepárna funkcia

Nech je funkcia $f(x)$ definovaná na množine M , ktorá s každým číslom x obsahuje aj číslo $-x$.

Funkcia $f(x)$ sa nazýva párna na M , ak

$$\forall x \in M \Rightarrow f(-x) = f(x)$$

Funkcia $f(x)$ sa nazýva nepárna na M , ak

$$\forall x \in M \Rightarrow f(-x) = -f(x)$$

Graf párnej funkcie je súmerný podľa súradnicovej osi y .

Graf nepárnej funkcie je súmerný podľa začiatku O súradnicovej sústavy.

Periodická funkcia

Nech je funkcia $f(x)$ definovaná na množine M a p je kladné reálne číslo.

Funkcia $f(x)$ je periodická s periódou p , ak platí:

1. pre každé číslo p z M je aj číslo $x \pm p$ z M
2. pre každé číslo x z M

$$f(x \pm p) = f(x)$$