

Determinanty

Determinant matice

Determinant matice je číslo označené $\det \mathbf{A} = |\mathbf{A}|$, ktoré vypočítame takto:

1. Ak je matica $\mathbf{A}$ stupňa $n = 1$, t.j. $\mathbf{A} = (a_{11})$, tak

$$\det \mathbf{A} = |\mathbf{A}| = a_{11}$$

2. Pre každé $n \geq 2$ sa determinant matice $\mathbf{A}$ rovná číslu

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}|\mathbf{A}_{11}| - a_{12}|\mathbf{A}_{12}| + a_{13}|\mathbf{A}_{13}| - \dots + (-1)^{1+n}|\mathbf{A}_{1n}|$$

kde $|\mathbf{A}_{1j}|$, pre $j = 1, 2, \dots, n$ sú subdeterminanty matíc, ktoré dostaneme z matice $\mathbf{A}$, keď v nej vynecháme prvý riadok a j -ty stĺpec.

Pre determinant matice **A** druhého stupňa platí

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Pre determinant matice **A** tretieho stupňa platí

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Sarusovo pravidlo

Pod determinant matice A opíšeme opäť jej prvé dva riadky a utvoríme súčiny po troch prvkoch v smere hlavnej a vedľajšej diagonály matice.

Súčiny v smere vedľajšej diagonály vynásobíme číslom -1 a všetky súčiny potom sčítame.

$$\begin{array}{r} + \\ + \\ + \\ - \\ - \\ - \end{array} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

- Determinant matice, ktorá obsahuje aspoň jeden nulový riadok alebo stĺpec, je nulový.
- Matica, ktorá nemá žiadne nulové riadky (žiadny jej riadok nie je násobkom iného riadku matice), má hodnotu rovnajúcu sa počtu riadkov a nazýva sa regulárna matica.
- Determinant regulárnej matice je nenulový.

Cramerovo pravidlo

Majme systém rovníc s dvoma neznámymi

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

Označme

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

Ak je $D \neq 0$, potom má daný systém jediné riešenie

$$(x_1, x_2) = \left(\frac{D_1}{D}, \frac{D_2}{D} \right)$$

Cramerovo pravidlo

Majme systém rovníc s tromi neznámymi

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

Označme

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Ak je $D \neq 0$, potom má daný systém jediné riešenie

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{D_1}{D}, \frac{D_2}{D}, \frac{D_3}{D} \right)$$