

DERIVÁCIA FUNKCIE

Nech je funkcia f definovaná v bode x_0 a na nejakom jeho okolí. Ak existuje limita

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

budeme ju nazývať derivácia funkcie f v bode x_0 a označovať $f'(x_0)$.

Označme $\Delta x = x - x_0$, potom

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Ak existuje derivácia $f'(x_0)$ funkcie f v bode x_0 hovoríme, že funkcia f je v bode x_0 **diferencovateľná**.

Ak je
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \pm\infty$$

hovoríme, že funkcia f má v bode x_0 nevlastnú deriváciu.

Jednostranné derivácie funkcie v bode

Číslo $f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

je derivácia funkcie f v bode x_0 sprava,

číslo $f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

je derivácia funkcie f v bode x_0 zľava.

Funkcia f má v bode x_0 deriváciu práve vtedy, ak má v tomto bode deriváciu sprava aj zľava a tieto sa rovnajú

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$$

Geometrický význam derivácie

Ak existuje derivácia funkcie f v bode x_0 , potom dotyčnica grafu funkcie f v bode $T = [x_0, f(x_0)]$ má smernicu rovnajúcu sa derivácii $f'(x_0)$ funkcie f v bode x_0 a jej rovnica je

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Ak je derivácia $f'(x_0)$ funkcie f nevlastná a funkcia f je v bode x_0 spojitá, potom dotyčnica grafu funkcie v bode $T = [x_0, f(x_0)]$ je kolmá na súradnicovú os x a jej rovnica je $x = x_0$.

Fyzikálny význam derivácie

Ak funkcia $s = f(t)$ vyjadruje zákon priamočiareho pohybu hmotného bodu, potom $s'(t_0)$ udáva veľkosť rýchlosti v čase t_0 – okamžitú rýchlosť tohto bodu.

Ak má funkcia f v bode x_0 deriváciu, potom je v bode x_0 spojitá.

Funkcia spojitá v bode x_0 nemusí mať v bode x_0 deriváciu.

Derivácia funkcie na množine

Nech má funkcia f deriváciu v každom bode množiny M . Funkcia, ktorá každému bodu $x_0 \in M$ priradí hodnotu $f'(x_0)$ sa nazýva deriváciou funkcie f na množine M a označujeme ju

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

Základné pravidlá derivovania

Nech funkcie f a g majú na množine M derivácie. Potom majú na množine M derivácie aj funkcie $c \cdot f$, $c \in R$, $f \pm g$, $f \cdot g$ a platí

$$1. [c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$$

$$2. [f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$3. [f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

4. Ak platí $g(x) \neq 0$ pre $\forall x \in M$, potom existuje aj

derivácia funkcie $\frac{f}{g}$ a platí

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Derivácia zloženej funkcie

Nech zložená funkcia $F(x) = f(\varphi(x))$ má deriváciu v každom bode $x \in M$, potom platí

$$\begin{aligned} F'(x) &= [f(\varphi(x))]' = \\ &= [f'(u)]_{u=\varphi(x)} \cdot \varphi'(x) = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \end{aligned}$$