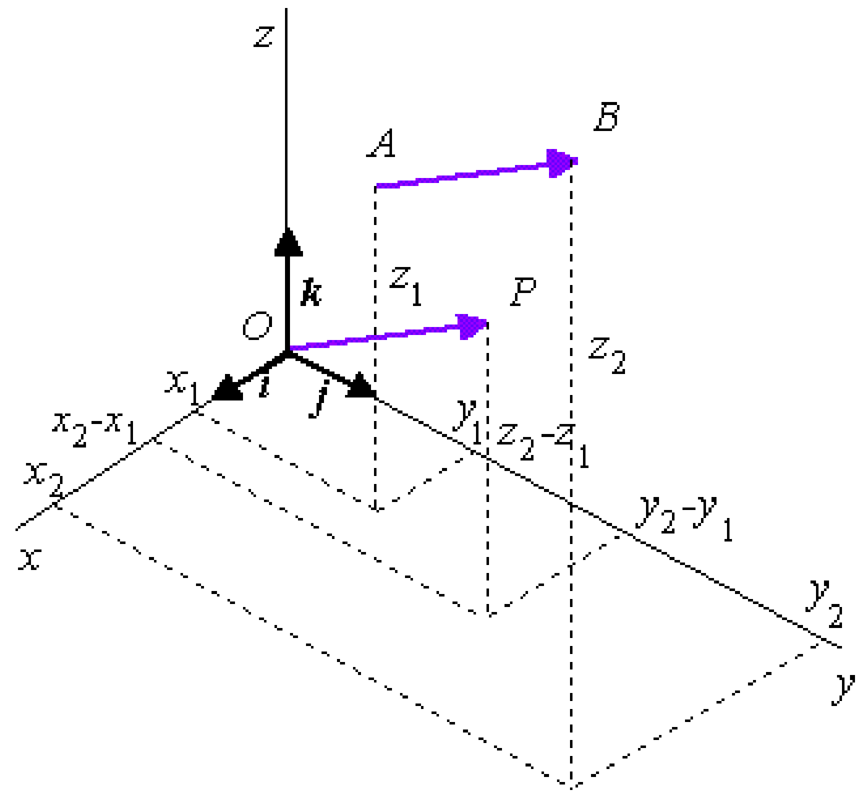
Vektory a operácie s vektormi

Vektorom budeme nazývať každú orientovanú úsečku

$$\vec{\mathbf{v}} = \overrightarrow{AB}$$



A - začiatočný bod

B - koncový bod

daného umiestnenia vektora

Súradnice vektora

$$A = [x_A, y_A, z_A]$$

$$B = [x_B, y_B, z_B]$$

$$\vec{\mathbf{v}} = B - A = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

Veľkosť - dĺžka vektora

$$\vec{\mathbf{v}} = \overrightarrow{AB} = B - A = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) = (v_1, v_2, v_3)$$

je vzdialenosť jeho určujúcich bodov *A* a *B*, platí

$$\left|\vec{\mathbf{v}}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

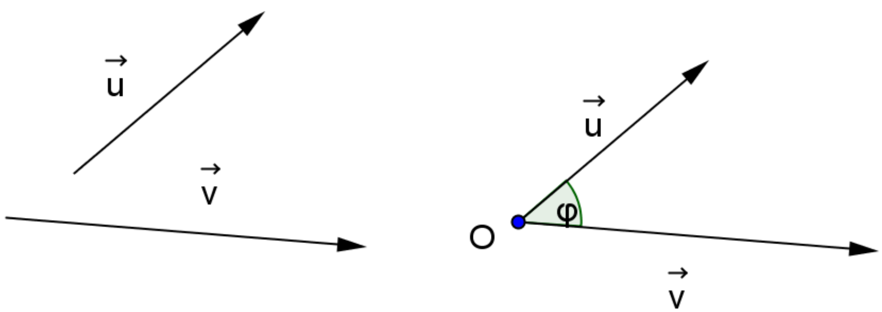
$\left|\vec{\mathbf{v}}\right| = 1$ - jednotkový vektor

$\vec{\mathbf{0}} = (0,0,0)$ - nulový vektor

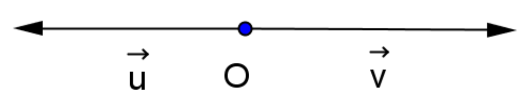
Uhol dvoch vektorov $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \quad \varphi = \angle(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}})$

$$\left|\vec{\mathbf{u}}\right| \neq 0, \left|\vec{\mathbf{v}}\right| \neq 0, \varphi \in \langle 0, \pi \rangle$$

rôznobežné vektory



$$\varphi \in (0, \pi)$$



$$\varphi = 0 \qquad\qquad \varphi = \pi$$

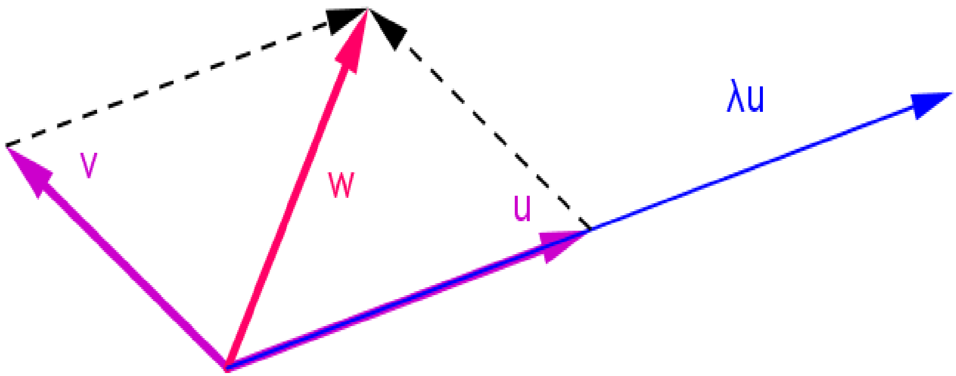
rovnobežné (kolineárne) vektory

Operácie s vektormi

Súčet vektorov $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}$

$$\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$$

$$\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$$



$$\vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}} =$$

$$= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

Násobenie vektora číslom

$$\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$$

$$\lambda \vec{\mathbf{u}} = (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3)$$

$$\vec{\mathbf{u}} \,||\, \vec{\mathbf{v}} \Leftrightarrow \exists \lambda \in R, \vec{\mathbf{u}} = \lambda \vec{\mathbf{v}}$$

Skalárny súčin vektorov $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}$

$$\vec{\mathbf{u}} . \vec{\mathbf{v}} = \left|\vec{\mathbf{u}}\right| . \left|\vec{\mathbf{v}}\right| \cos\varphi, \quad \varphi = \angle\left(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}\right)$$

$$\text{Ak } \vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{0}} \vee \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{0}} \Rightarrow \vec{\mathbf{u}} . \vec{\mathbf{v}} = 0$$

$$\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$$

$$\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3) \quad \vec{\mathbf{u}} . \vec{\mathbf{v}} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{\mathbf{u}} . \vec{\mathbf{v}}}{\left|\vec{\mathbf{u}}\right| . \left|\vec{\mathbf{v}}\right|}, \quad \varphi = \angle\left(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}\right), \quad \vec{\mathbf{u}} \neq \vec{\mathbf{0}} \wedge \vec{\mathbf{v}} \neq \vec{\mathbf{0}}$$

$$\vec{\mathbf{u}} \perp \vec{\mathbf{v}} \Leftrightarrow \vec{\mathbf{u}} . \vec{\mathbf{v}} = 0, \quad \vec{\mathbf{u}} \neq \vec{\mathbf{0}} \wedge \vec{\mathbf{v}} \neq \vec{\mathbf{0}}$$

Vektorový súčin vektorov $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}$ je vektor $\vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}$

1. $\left|\vec{\mathbf{w}}\right| = \left|\vec{\mathbf{u}}\right| . \left|\vec{\mathbf{v}}\right| \sin\varphi, \quad \varphi = \angle\left(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}\right)$

2. $\vec{\mathbf{w}} \perp \vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{w}} \perp \vec{\mathbf{v}}$

3. Vektory $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}$ tvoria pravotočivý systém.

$$\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$$

$$\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$$

$$\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{u}} \parallel \vec{\mathbf{v}} \Leftrightarrow \vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{0}}, \quad \vec{\mathbf{u}} \neq \vec{\mathbf{0}} \wedge \vec{\mathbf{v}} \neq \vec{\mathbf{0}}$$

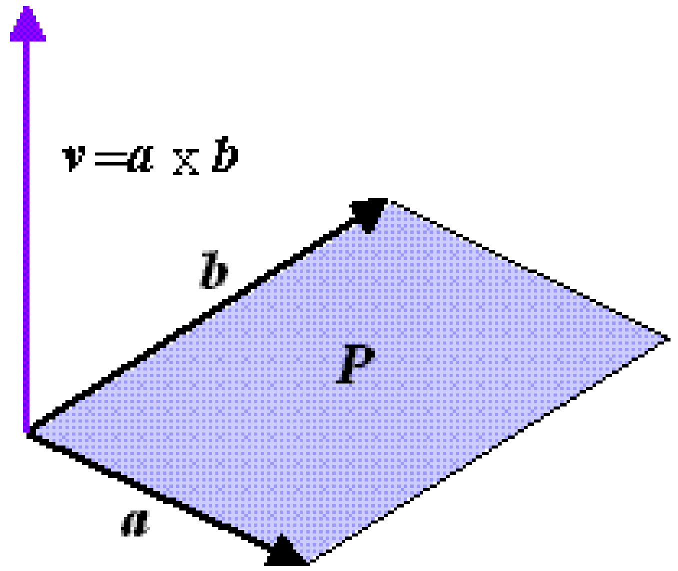
Geometrická interpretácia vektorového súčinu

Veľkosť vektora $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$

sa rovná obsahu *P* rovnobežníka so stranami

v nekolineárnych vektoroch $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}$

$$P = \left| \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} \right|$$



Zmiešaný súčin vektorov $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}$ je číslo $\left[\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}\right]$

$$\left[\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}\right] = \left(\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}\right) . \vec{\mathbf{w}}$$

$$\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$$

$$\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$$

$$\vec{\mathbf{w}} = (w_1, w_2, w_3)$$

$$\left[\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}\right] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Vektory $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}$ ležia v jednej rovine (sú komplanárne)

práve vtedy, keď $\left[\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}\right] = 0$

Geometrická interpretácia zmiešaného súčinu

Absolútna hodnota zmiešaného súčinu troch vektorov $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}$

sa rovná objemu *V* rovnobežnostena so stranami v týchto nekomplanárnych vektoroch

$$V = \left[\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}\right]$$