

Vektorové funkcie

Vektorový priestor

Množinu všetkých vektorov $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, ktorých zložky sú reálne čísla $a_i \in \mathbf{R}$ nazývame vektorový priestor nad poľom reálnych čísel a označujeme $V^n(\mathbf{R})$, ak platí:

1. pre každé reálne číslo k a každý vektor $\mathbf{a} \in V^n(\mathbf{R})$ platí $k.\mathbf{a} \in V^n(\mathbf{R})$
2. pre každé 2 vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^n(\mathbf{R})$ platí $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}, \mathbf{c} \in V^n(\mathbf{R})$
3. pre každé 2 vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^n(\mathbf{R})$ a 2 reálne čísla k, l platí

$$k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k.\mathbf{a} + k.\mathbf{b}, (k + l).\mathbf{a} = k.\mathbf{a} + l.\mathbf{a}$$

$$(k.l).\mathbf{a} = k.(l.\mathbf{a}), 1.\mathbf{a} = \mathbf{a}, \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$$

Vo vektorovom priestore $V^n(\mathbf{R})$ ďalej definujeme operácie:

4. skalárny súčin vektorov

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i$$

5. vektorový súčin vektorov $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ špeciálne pre $V^3(\mathbf{R})$

6. zmiešaný súčin vektorov $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$, špeciálne pre $V^3(\mathbf{R})$
s danými vlastnosťami a

7. normu - veľkosť vektorov

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$$

Nech je M interval v reálnych číslach a $V^n(\mathbf{R})$ je n -rozmerný vektorový priestor nad poľom reálnych čísel $\mathbf{R}$.

Zobrazenie f z množiny $\mathbf{R}$ do vektorového priestoru $V^n(\mathbf{R})$, ktoré každému reálnemu číslu $t \in M$ priradí vektor z priestoru $V^n(\mathbf{R})$

$$f: M \rightarrow V^n(\mathbf{R}), \quad t \rightarrow f(t)$$

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$$

kde $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ sú reálne funkcie jednej reálnej premennej t definované na tom istom intervale M (skalárne súradnicové funkcie), budeme nazývať vektorová funkcia jednej reálnej premennej t .

Interval M sa nazýva obor definície vektorovej funkcie f - tiež $D(f)$.

Obraz bodu $t_0 \in M$ v zobrazení $\mathbf{f}$ je vektor, ktorý je priradený bodu t_0 , označujeme ho

$$\mathbf{f}(t_0) = (f_1(t_0), f_2(t_0), \dots, f_n(t_0))$$

a nazývame hodnotu funkcie $\mathbf{f}$ v bode t_0 .

Obor hodnôt funkcie $\mathbf{f}$ je množina

$$H(\mathbf{f}) = \{\mathbf{a} \in V^n(R); \exists t \in D(\mathbf{f}), \mathbf{a} = \mathbf{f}(t)\}$$

Pre $n = 1$ namiesto $\mathbf{f}(t) = (f_1(t))$ uvažujeme o funkcii jednej reálnej premennej t .

Pre $n = 2$ používame namiesto $\mathbf{f}(t) = (f_1(t), f_2(t))$ najčastejšie zápis

$$\mathbf{f}(t) = (x(t), y(t)) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$

Pre $n = 3$ používame namiesto $\mathbf{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ najčastejšie zápis

$$\mathbf{f}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

Vektorová funkcia f je jednoznačne určená svojim definičným oborom $D(f) \subset \mathbf{R}$ a funkčným predpisom (skalárnymi súradnicovými funkciami), podľa ktorého je každému bodu $t \in D(f)$ priradený práve jeden vektor nazývaný funkčná hodnota $f(t)$.

Tak ako pri funkcii jednej premennej môže byť funkčný predpis daný rôznymi spôsobmi

- slovne

- tabuľkou hodnôt

- grafom

- analyticky - pomocou matematického výrazu alebo rovnice.

Nech $\mathbf{f}$ je vektorová funkcia premennej t definovaná na intervale M v reálnych číslach.

Grafom (hodograom) funkcie $\mathbf{f}$ nazývame množinu $G(\mathbf{f})$ všetkých takých bodov $X = [x_1, x_2, \dots, x_n] \in \mathbf{E}^n$, pre ktoré platí:

1. $\mathbf{OX} = \mathbf{a} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{V}_n$
2. $\exists t \in \mathbf{R}; \mathbf{a} = \mathbf{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$

Geometricky môžeme bezprostredne znázorniť len graf vektorovej funkcie pre $n = 1, 2$ a 3 .

Grafom vektorovej funkcie $\mathbf{f}(t) = (x(t), y(t))$ je rovinná krivka,
grafom vektorovej funkcie $\mathbf{f}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ je krivka priestorová.

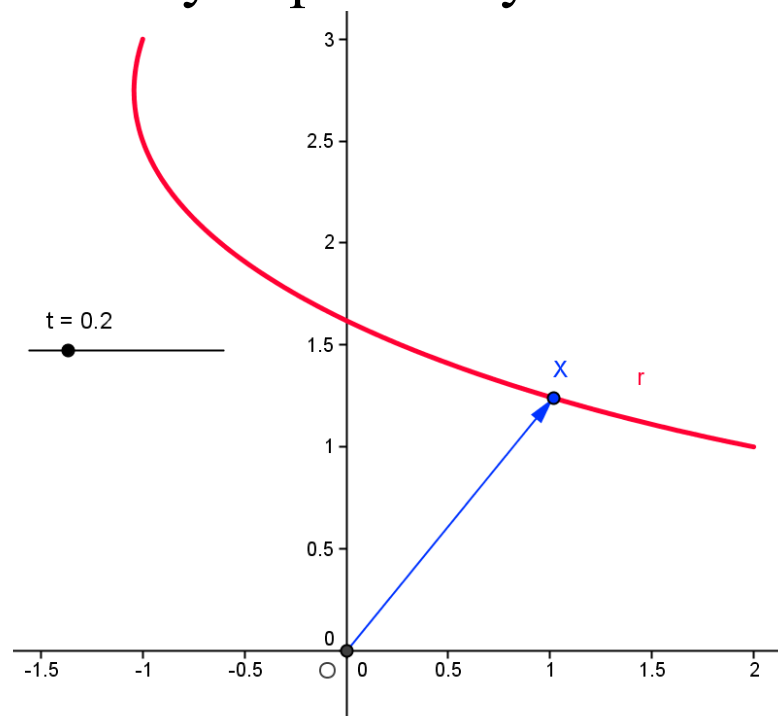
Grafom vektorovej funkcie $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ definovanej na $I \subset \mathbf{R}$ je rovinná krivka k , množina všetkých takých bodov $X = [x, y] \in \mathbf{E}^2$, pre ktoré platí:

1. $\mathbf{OX} = \mathbf{a} = (x_a, y_a) \in \mathbf{V}^2(\mathbf{R})$, vektor $\mathbf{a}$ sa nazýva polohový vektor bodu krivky
2. $\exists t \in I; \mathbf{a} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$

Parametrické rovnice krivky

$$x = x(t), y = y(t), t \in I$$

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)), t \in I$$



Grafom vektorovej funkcie $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ definovanej na $I \subset \mathbf{R}$ je priestorová krivka K , teda množina všetkých takých bodov

$X = [x, y, z] \in \mathbf{E}^3$, pre ktoré platí:

1. $\mathbf{OX} = \mathbf{a} = (x_a, y_a, z_a) \in \mathbf{V}^3(\mathbf{R})$, vektor $\mathbf{a}$ sa nazýva polohový vektor bodu krivky

2. $\exists t \in I; \mathbf{a} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

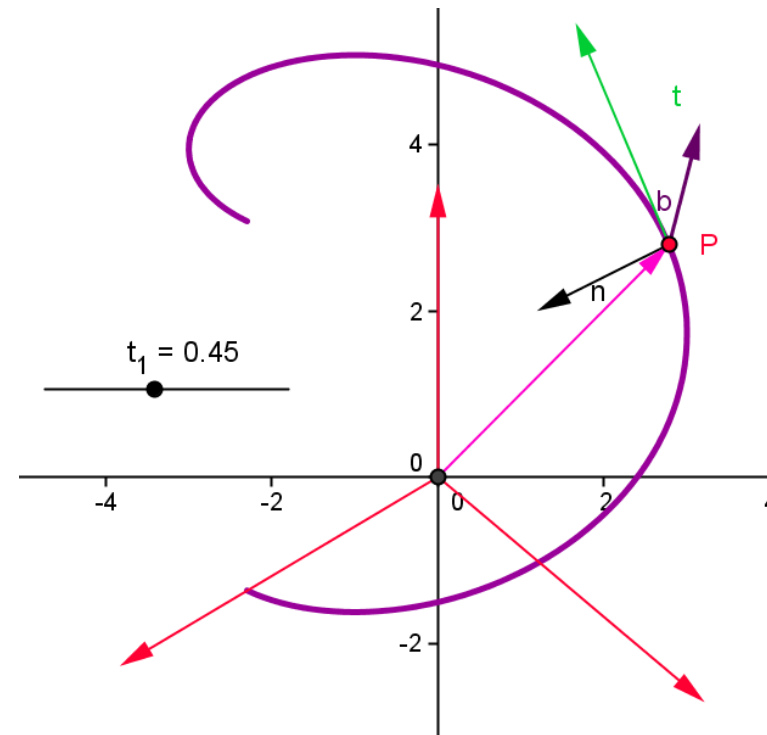
Parametrické rovnice krivky

$x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in I$

$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in I$

Skrutkovica

$\mathbf{r}(t) = (r \cos(t), r \sin(t), vt), t \in \langle 0, 2\pi \rangle$



Pojem vektorovej funkcie možno zovšeobecniť na vektorovú funkciu viac premenných.

Nech M je oblasť - jednoducho súvislá podmnožina $\mathbf{R}^n$ a $V^n(\mathbf{R})$ je vektorový priestor nad poľom reálnych čísel.

Zobrazenie f z množiny $\mathbf{R}^n$ do vektorového priestoru $V^n(\mathbf{R})$, ktoré každej n -tici reálnych čísel $(t_1, t_2, \dots, t_n) \in M$ priradí vektor z priestoru $V^n(\mathbf{R})$

$$f: M \rightarrow V^n(\mathbf{R}), (t_1, t_2, \dots, t_n) \rightarrow f(t_1, t_2, \dots, t_n)$$

$$f(t_1, t_2, \dots, t_n) = (f_1(t_1, t_2, \dots, t_n), f_2(t_1, t_2, \dots, t_n), \dots, f_n(t_1, t_2, \dots, t_n))$$

kde $f_1(t_1, t_2, \dots, t_n), f_2(t_1, t_2, \dots, t_n), \dots, f_n(t_1, t_2, \dots, t_n)$ sú reálne funkcie n reálnych premenných $t_1, t_2, \dots, t_n$ definované na tej istej oblasti M (súradnicové funkcie), budeme nazývať vektorová funkcia n reálnych premenných $t_1, t_2, \dots, t_n$.

Vektorová funkcia dvoch premenných definovaná na $M \subset \mathbf{R}^2$ s oborom hodnôt vo vektorovom priestore $V^2(\mathbf{R})$ je zobrazenie, ktoré každej usporiadanej dvojici reálnych čísel $(u, v) \in M$ priradí vektor z $V^2(\mathbf{R})$

$$\mathbf{f}: M \rightarrow V^2(\mathbf{R}), (u, v) \rightarrow \mathbf{f}(u, v)$$

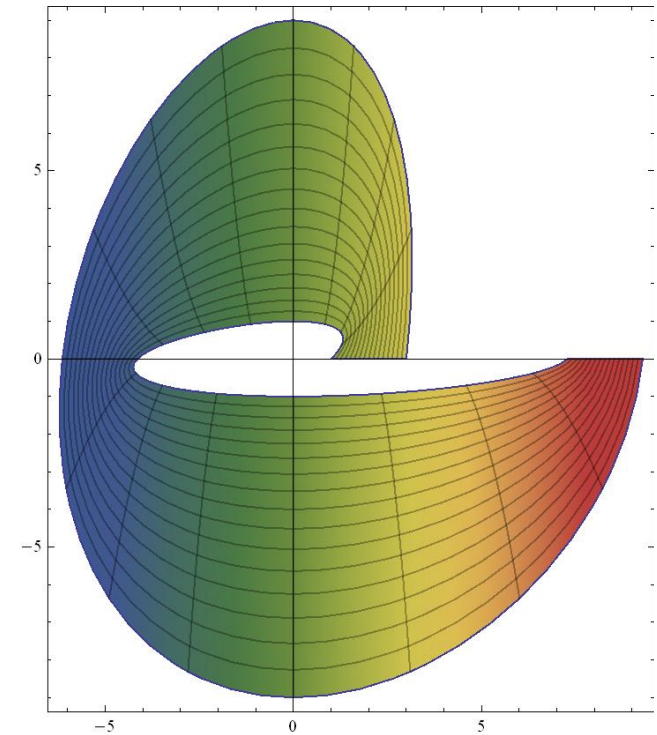
$$\mathbf{f}(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$$

Grafom funkcie je rovinná oblasť priestoru E^2

Rovinná oblasť

$$\mathbf{f}(u, v) = ((u + v)\cos v, u^2\sin v)$$

$$(u, v) \in \langle 1, 3 \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle$$



Vektorová funkcia dvoch premenných definovaná na $M \subset \mathbf{R}^2$ s oborom hodnôt vo vektorovom priestore $V^3(\mathbf{R})$ je zobrazenie, ktoré každej usporiadanej dvojici reálnych čísel $(u, v) \in M$ priradí vektor z $V^3(\mathbf{R})$

$$\begin{aligned} f: M &\rightarrow V^3(\mathbf{R}), (u, v) \rightarrow f(u, v) \\ f(u, v) &= (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned}$$

Grafom funkcie je plocha priestoru E^3 , ktorú môžeme zobrazit' metódami deskriptívnej geometrie v niektorej so známych premietacích metód.

Gul'ová plocha

$$\begin{aligned} p(u, v) &= (r \cos u \cos v, r \cos u \sin v, r \sin v) \\ (u, v) &\in <0, 2\pi>^2 \end{aligned}$$

