

Integrovanie vektorových funkcií

Taylorova veta

Nech má vektorová funkcia $\mathbf{r}(t)$ na uzavretom intervale $J = \langle t_0, t_0 + \Delta t \rangle$ spojité derivácie až do rádu $n + 1$.

Potom existuje taká vektorová funkcia α , že

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \alpha(\Delta t) = \mathbf{0}$$

a platí

$$\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) = \mathbf{r}(t_0) + \frac{\mathbf{r}'(t_0)}{1!} \Delta t + \frac{\mathbf{r}''(t_0)}{2!} \Delta t^2 + \dots + \frac{\mathbf{r}^{(n)}(t_0)}{n!} \Delta t^n + \mathbf{R}_{n+1}$$

$$\mathbf{R}_{n+1} = \left[\frac{\mathbf{r}^{(n+1)}(t_0)}{(n+1)!} + \alpha(\Delta t) \right] \Delta t^{n+1}$$

Takýto zápis nazývame Taylorov rozvoj funkcie rádu n , kde $\mathbf{R}_{n+1}$ je zvyšok.

Integrál vektorovej funkcie

Vektorová funkcia $\mathbf{r}(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$

je integrovateľná na intervale $\langle \alpha, \beta \rangle$ vtedy a len vtedy,

keď sú na intervale $\langle \alpha, \beta \rangle$ integrovateľné všetky jej zložky,

skalárne súradnicové funkcie $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ a platí

$$\int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{r}(t) dt = \left(\int_{\alpha}^{\beta} f_1(t) dt, \int_{\alpha}^{\beta} f_2(t) dt, \dots, \int_{\alpha}^{\beta} f_n(t) dt \right)$$

Určitý integrál vektorovej funkcie je vektor priestoru $V^n(\mathbf{R})$.

Vektorová funkcia $\mathbf{R}(t) = (F_1(t), F_2(t), \dots, F_n(t))$

definovaná na otvorenom intervale $J = \langle \alpha, \beta \rangle$ sa nazýva

primitívna funkcia k vektorovej funkcii $\mathbf{r}(t)$ definovanej na tom istom intervale J , ak pre každé $t \in J$ platí $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{r}(t)$.

Funkcie $F_1(t), F_2(t), \dots, F_n(t)$ sú primitívne funkcie

k príslušným skalárnym súradnicovým funkciám $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$.

Vektorovú funkciu $\mathbf{R}(t)$ nazývame aj
neurčitý integrál vektorovej funkcie $\mathbf{r}(t)$

$$\int \mathbf{r}(t) dt = \left(\int f_1(t) dt, \int f_2(t) dt, \dots, \int f_n(t) dt \right)$$

Nech je vektorová funkcia $\mathbf{r}(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$

integrovateľná na intervale $J = \langle \alpha, \beta \rangle$

a nech vektorová funkcia $\mathbf{R}(t) = (F_1(t), F_2(t), \dots, F_n(t))$

spojitá na intervale J je primitívnou funkciou

k vektorovej funkcii $\mathbf{r}(t)$ na J .

Potom platí

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{r}(t) dt &= \mathbf{R}(\beta) - \mathbf{R}(\alpha) = \\ &= (F_1(\alpha) - F_1(\beta), F_2(\alpha) - F_2(\beta), \dots, F_n(\alpha) - F_n(\beta)) \end{aligned}$$

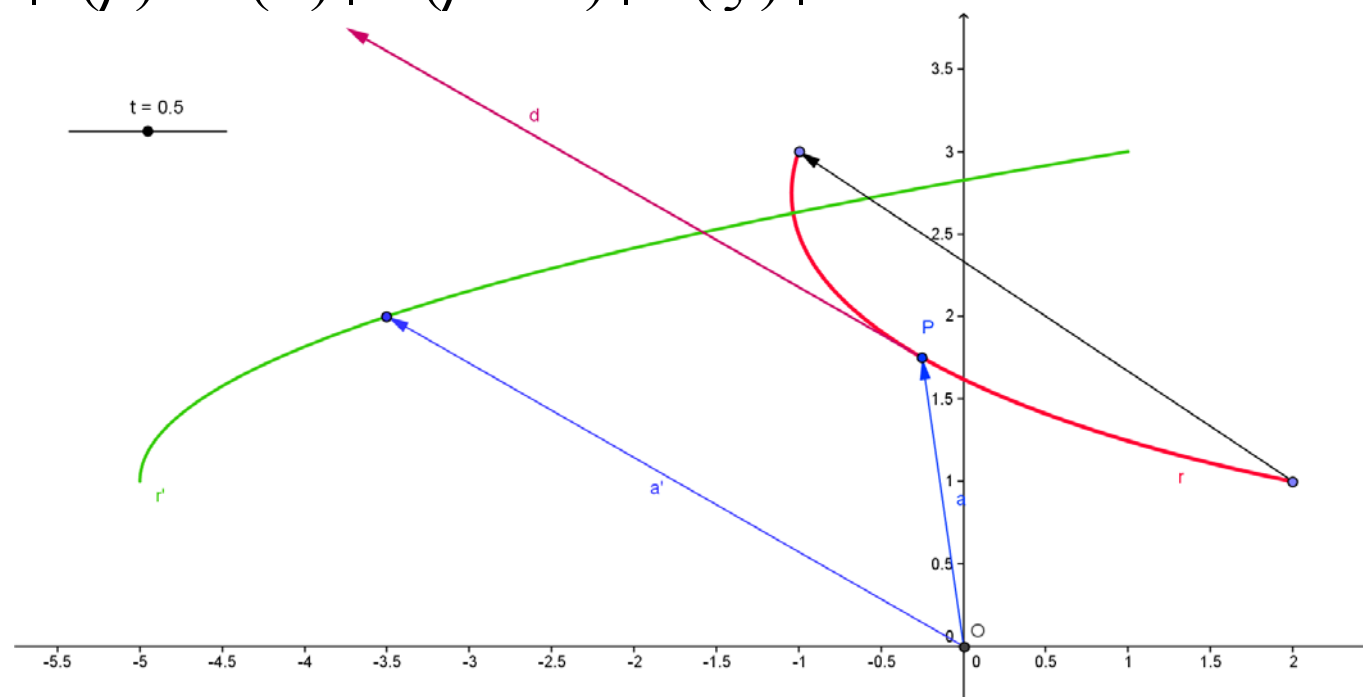
Newton-Leibnitzov vzorec pre vektorové funkcie

Nech má vektorová funkcia $\mathbf{r}$ tieto vlastnosti

1. je spojitá na intervale $\langle \alpha, \beta \rangle$
2. v každom bode intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ má deriváciu.

Potom v intervale $\langle \alpha, \beta \rangle$ existuje aspoň jeden bod ξ taký, že

$$|\mathbf{r}(\beta) - \mathbf{r}(\alpha)| \leq (\beta - \alpha) |\mathbf{r}'(\xi)|$$



Obdoba vety o strednej hodnote funkcie na intervale