

Číselné a funkcionálne rady

Číselné rady

Nech je daná postupnosť reálnych čísel

$$\{a_n\} = a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

Výraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

sa nazýva nekonečný číselný rad, číslo a_n je n -tým členom radu.

Číslo

$$s_n = \sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n, n = 1, 2, \dots$$

sa nazýva n -tý čiastočný súčet nekonečného číselného radu.

Číselný rad **konverguje**, ak postupnosť $\{s_n\}$ jeho čiastočných súčtov má vlastnú limitu

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

a číslo s nazývame súčet nekonečného číselného radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$

Ak postupnosť $\{s_n\}$ nemá vlastnú limitu, hovoríme, že rad je divergentný.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + \dots + n + \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2} = \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^n + \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \text{neexistuje}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$$

Nutná podmienka konverencie radu

Ak je rad konvergentný, potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

Ak uvedená podmienka neplatí, rad je nutne divergentný.

Majorantný rad k nekonečnému číselnému radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je nekonečný číselný

rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, ak pre jeho členy platí, že pre každé n

$$b_n \geq |a_n|.$$

Kritériá konverencie

Pravidlá na určovanie konverencie (divergencie) nekonečných radov

1. Porovnávacie kritérium

- Ak k číselnému radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ existuje konvergentný majorantný číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, potom je aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentný.
- Ak je číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentný, potom je divergentný aj každý k nemu majorantný číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Ak predpokladáme konvergenciu daného radu, hľadáme k nemu majorantný konvergentný rad (najčastejšie sa používa vhodný geometrický rad).

Ak naopak predpokladáme divergenciu radu, hľadáme divergentný rad, ku ktorému je daný rad majorantný (používa sa harmonický rad, alebo nejaká jeho modifikácia).

Hovoríme, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolútne konvergentný, ak je konvergentný aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$; ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje, rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je relatívne konvergentný.

2. D'Alambertovo (podielové) kritérium

Ak pre rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lambda$, potom

- pre $\lambda > 1$, rad diverguje
- pre $\lambda < 1$, rad absolútne konverguje
- pre $\lambda = 1$, o konvergencii (divergencii) nevieme rozhodnúť.

3. Cauchyho (odmocninové) kritérium

Ak pre rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda$, potom

- pre $\lambda > 1$, rad diverguje
- pre $\lambda < 1$, rad absolútne konverguje
- pre $\lambda = 1$, o konvergencii (divergencii) nevieme rozhodnúť.

3. Integrálne Cauchyho kritérium

Nech je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ rad s nezápornými členmi a nech $f(x)$ je spojitá nerastúca

funkcia reálnej premennej definovaná na intervale $\langle K, \infty \rangle$, $K > 0$, pričom pre všetky prirodzené čísla $n \geq K$ platí $f(n) = a_n$. Potom rad konverguje práve

vtedy, keď konverguje nevlastný integrál $\int_K^{\infty} f(x) dx$.

Rady so striedavými znamienkami

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots, \forall n, a_n > 0 \ (a_n < 0)$$

Leibnizovo kritérium

Ak pre všetky prirodzené n platí $0 < a_{n+1} \leq a_n$, potom rad so striedavými

znamienkami $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ konverguje práve vtedy, ak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Funkcionálne rady

Postupnosť, ktorej všetky členy sú funkcie, sa nazýva funkcionálna postupnosť

$$\{f_n\} = \{f_n(x)\} = f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$$

Ak sú všetky funkcie postupnosti $\{f_n\}$ definované v nejakom bode (čísle) x_0 , potom môžeme hovoriť o konvergencii (divergencii) danej funkcionálnej postupnosti $\{f_n\}$ v bode x_0 .

Ak postupnosť $\{f_n\}$ konverguje (diverguje) v každom bode istej množiny M , potom hovoríme, že konverguje (diverguje) na množine M .

Množinu všetkých bodov, v ktorých postupnosť $\{f_n\}$ konverguje, nazývame **oborom konvergence** postupnosti $\{f_n\}$.

Ak postupnosť $\{f_n\}$ konverguje na M , potom je na M definovaná funkcia

$$f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0), \forall x_0 \in M$$

ktorú nazývame limita postupnosti na M , zapisujeme

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$$

Platí

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \text{ na } M \Leftrightarrow \forall x_0 \in M, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : \forall n \in N, N > n_0 \Rightarrow |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Funkcia f nemusí byť spojitá, ak je spojitá, hovoríme o rovnomernej konvergencii funkcionálnej postupnosti.

Funkcionálny rad

Nech sú všetky členy funkcionálnej postupnosti $\{f_n\}$ definované na neprázdnej množine M . Výraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f_1 + f_2 + \dots + f_n + \dots$$

nazývame funkcionálny rad.

Nech

$$s_n = \sum_{i=1}^n f_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n, n = 1, 2, \dots$$

Funkciu s_n nazývame n -tý čiastočný súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$

Funkcionálny rad sa nazýva konvergentný (divergentný) na množine M , ak postupnosť jeho čiastočných súčtov $\{s_n\}$ konverguje (diverguje) na M .

Obor konvergenzie funkcionálneho radu je obor konvergenzie funkcionálnej postupnosti $\{s_n\}$ - označujeme OK .

Ak existuje limita
$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

na množine M , potom funkciu s nazývame súčet radu na M

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = s, \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = s(x)$$

Ak je $x_0 \in OK$, potom je číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ konvergentný a jeho súčet je

hodnota funkcie s v bode x_0 ,
$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) = s(x_0).$$

Úlohy- nájsť obor konvergenzie funkcionálneho radu a jeho súčet.

Weierstrassovo kritérium

Ak je číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentný a pre všetky členy radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ platí

$$|f_n(x)| \leq a_n, \forall x \in M,$$

potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje na množine M .

Mocninové rady

Funkcionálny rad tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + \dots$$

sa nazýva mocninový rad so stredom v bode a . Čísla a_n sa nazývajú koeficienty radu.

Pre $a = 0$ dostávame

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots$$

Mocninový rad je isté zovšeobecnenie polynómu, má aj určité podobné vlastnosti. Mocninový rad je jednoznačne určený svojimi koeficientmi a stredom.

Oborom konvergenzie mocninového radu je interval, alebo jednobodová množina.

Pre každý mocninový rad existuje číslo $R \geq 0$ (pripúšťa sa aj $R = \infty$) také, že daný rad konverguje absolútne v každom bode $x \in (a - R, a + R)$ a diverguje v každom bode $x \notin (a - R, a + R)$.

R sa nazýva **polomer konvergenzie** a interval $IK = (a - R, a + R)$ **interval konvergenzie** mocninového radu.

Ak rad konverguje iba vo svojom strede, $R = 0$, $IK = \{a\}$.

Ak $R = \infty$, rad konverguje na celej množine reálnych čísel, $IK = (-\infty, \infty)$.

Mocninový rad môže konvergovať aj v hraničných bodoch intervalu IK .

Nech $R > 0$ je polomer konvergenzie mocninového radu so stredom a , nech $s(x)$ je súčet radu, $IK = (a - R, a + R)$ je obor konvergenzie radu. Potom platí

- funkcia $s(x)$ je spojitá na IK
- ak $\langle b, c \rangle \subset IK$, potom existuje

$$\int_b^c s(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n (x - a)^n dx$$

ktorý dostaneme integrovaním mocninového radu člen po člene

- funkcia $s(x)$ má na IK primitívnu funkciu, ktorú dostaneme integrovaním mocninového radu člen po člene
- funkcia $s(x)$ má na IK deriváciu, ktorú dostaneme derivovaním mocninového radu člen po člene
- integrovaním a derivovaním mocninového radu sa obor konvergenzie nezmení.

Taylorove rady

Nech má funkcia f na intervale $J = (a - c, a + c)$ derivácie až do rádu $n + 1$.

Pre každé $x \in J$ potom existuje také ξ ležiace medzi x a a , že platí

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Polynóm n -tého stupňa

$$T_n(f, a, x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

nazývame n -tý Taylorov polynóm funkcie f so stredom v bode a ,
výraz

$$R_n(f, a, x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

nazývame zvyšok po n -tom Taylorovom polynóme.

Platí

$$f(a) = T_n(f, a, a)$$

Hodnota funkcie f v bode a sa rovná hodnote Taylorovho polynómu $T_n(f, a, x)$ v bode a .

$$T'_n(f, a, a) = f'(a), \dots, T_n^{(n)}(f, a, a) = f^{(n)}(a)$$

Hodnota derivácií funkcie f v bode a až do rádu n sa rovná hodnotám príslušných derivácií Taylorovho polynómu $T_n(f, a, x)$ v bode a .

S rastúcim n klesá hodnota zvyšku $R_n(f, a, x)$.

Ak má funkcia f v bode a derivácie všetkých rádov, môžeme zostrojiť mocninový rad so stredom v bode a (zovšeobecnenie Taylorovho polynómu)

Taylorov rad funkcie f v bode a $T(f, a, x)$

$$T(f, a, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \dots$$

Pre $a = 0$ sa rad nazýva **Maclaurinov rad**.

Súčtom Taylorovho radu $T_n(f, a, x)$ nemusí byť vždy nutne funkcia f , väčšinou však tomu tak je.

Existujú aj funkcie, ktorých Taylorov rad konverguje, nie však k týmto funkciám.

Nutná a postačujúca podmienka k tomu, by funkcia bola súčtom svojho Taylorovho radu

Nech má funkcia f na intervale $J = (a - c, a + c)$ derivácie všetkých rádov.

Potom pre každé $x \in J$ platí

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots$$

vtedy a len vtedy, ak $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(f, a, x) = 0$.

Nech má funkcia f na intervale $J = (a - c, a + c)$ derivácie všetkých rádov.

Ak existuje taká konštanta $K > 0$, že platí

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in J : |f^{(n)}(x)| < K$$

potom pre každé $x \in J$ platí

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots$$

Ak je funkcia f na istom intervale súčtom svojho Taylorovho radu, hovoríme, že ju možno na tomto intervale rozvinúť do mocninového radu a tento rad nazývame (nekonečným) rozvojom funkcie f .

Rozvoj funkcie do mocninového radu so stredom v bode a je jediný, a vždy sa jedná o Taylorov rad danej funkcie so stredom v bode a .

$$\sin x = T(\sin x, 0, x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, x \in (-\infty, \infty)$$

$$\cos x = T(\cos x, 0, x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, x \in (-\infty, \infty)$$

$$e^x = T(e^x, 0, x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, x \in (-\infty, \infty)$$

$$\ln(x+1) = T(\ln(x+1), 0, x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots, x \in (-1, 1)$$

$$\arctan x = T(\arctan x, 0, x) = x - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, x \in \langle -1, 1 \rangle$$

$$(x+1)^p = T((x+1)^p, 0, x) = 1 + \binom{p}{1}x + \dots + \binom{p}{n}x^n + \dots, x \in (-1, 1)$$