

Vektorové a skalárne polia

$\Omega \subset \mathbf{E}^3$ je priestorová oblasť - otvorená alebo uzavretá súvislá podmnožina bodov priestoru $\mathbf{E}^3$ určených karteziánskymi súradnicami, usporiadanými trojicami reálnych čísel $X = [x, y, z] \in \mathbf{R}^3$.

Nech f je skalárna funkcia, ktorá každému bodu $X \in \Omega$ priradí reálne číslo. Dvojicu (Ω, f) nazývame stacionárne skalárne pole, funkcia f sa nazýva potenciál tohto poľa.

$$f(X) = f(x, y, z) = h, h \in H(f) \subset \mathbf{R}$$

Na znázornenie grafu funkcie f potrebujeme štvorrozmerný priestor $\mathbf{E}^4$.

Nech je funkcia $f(X)$ spojitá na oblasti Ω a má tu spojité parciálne derivácie podľa všetkých premenných, ktoré sa nerovnajú súčasne nule. Množina bodov oblasti Ω , v ktorých má potenciál rovnakú hodnotu $C \in H(f)$, tvorí plochu priestoru $\mathbf{E}^3$ s rovnicou (ktorej vyhovujú súradnice bodov)

$$f(x, y, z) = C.$$

Plochy určené rovnicami

$$f(x, y, z) = C_i, C_i \in H(f)$$

sa nazývajú ekvipotenciálne (hladinové) plochy skalárneho poľa (Ω, f) .

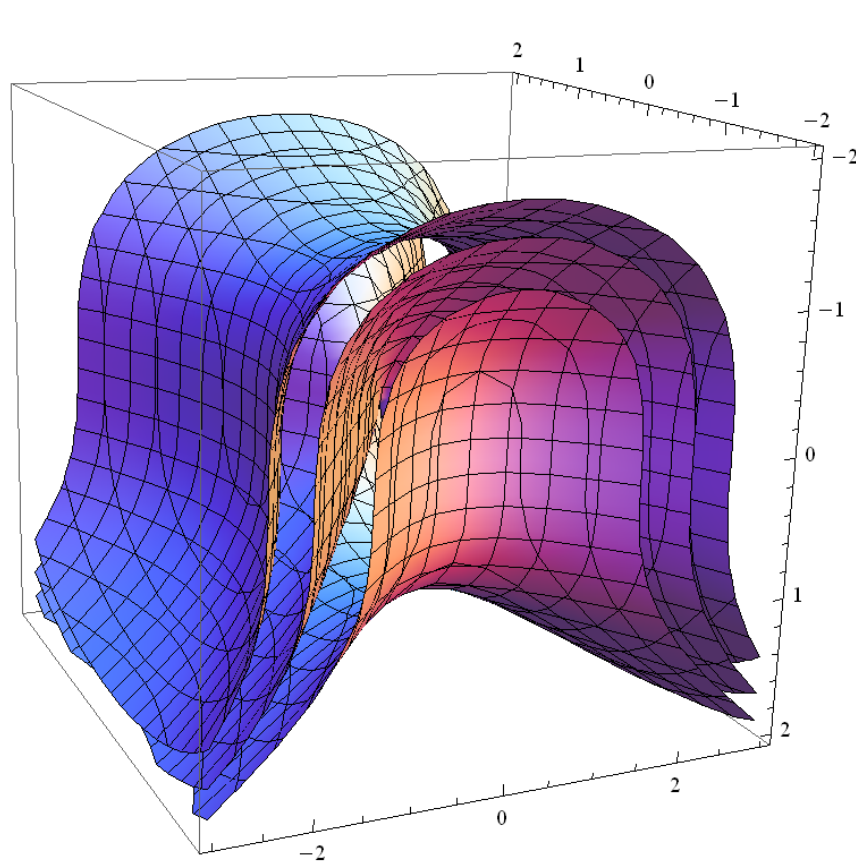
Napr. izotermické plochy v teplotnom poli, alebo izobarické plochy v poli atmosferického tlaku.

Ekvipotenciálne plochy elektrostatického poľa vytvoreného daným bodovým nábojom sú sústredné guľové plochy so stredom v danom bode q .

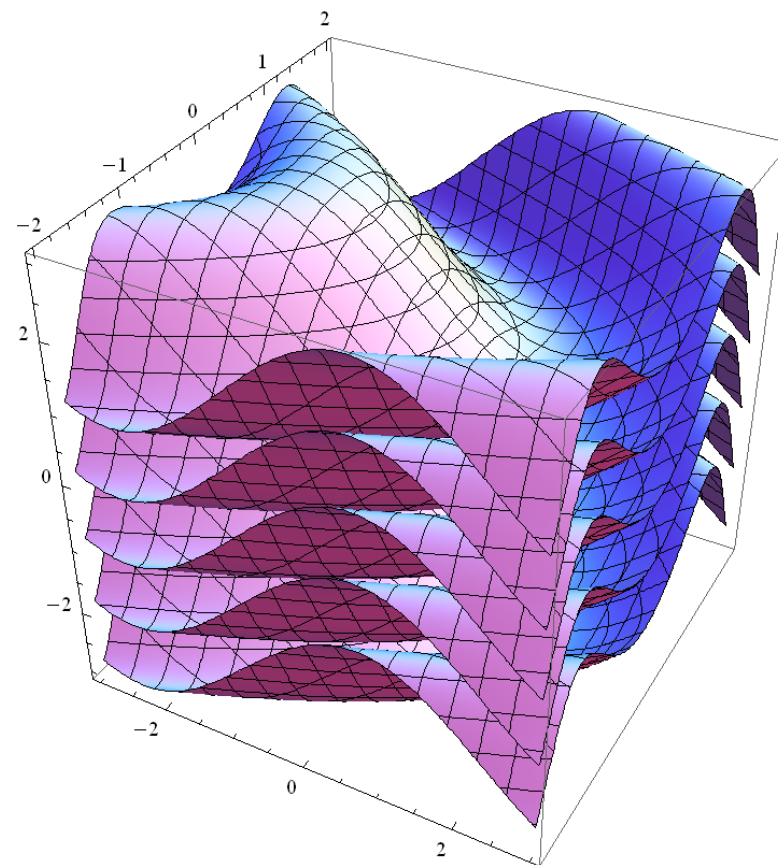
Sústava všetkých ekvipotenciálnych plôch skalárneho poľa (Ω, f) prislúchajúcich všetkým hodnotám potenciálu vyplňa celú oblasť Ω .

Každým bodom oblasti prechádza práve jedna ekvipotenciálna plocha a žiadne dve ekvipotenciálne plochy pre $C_i \neq C_j$ nemajú spoločné body.

Priestorové skalárne pole, graf funkcie troch premenných, trojrozmerná varieta (teleso) v E^4 –vizualizovaná ekvipotenciálnymi plochami v E^3



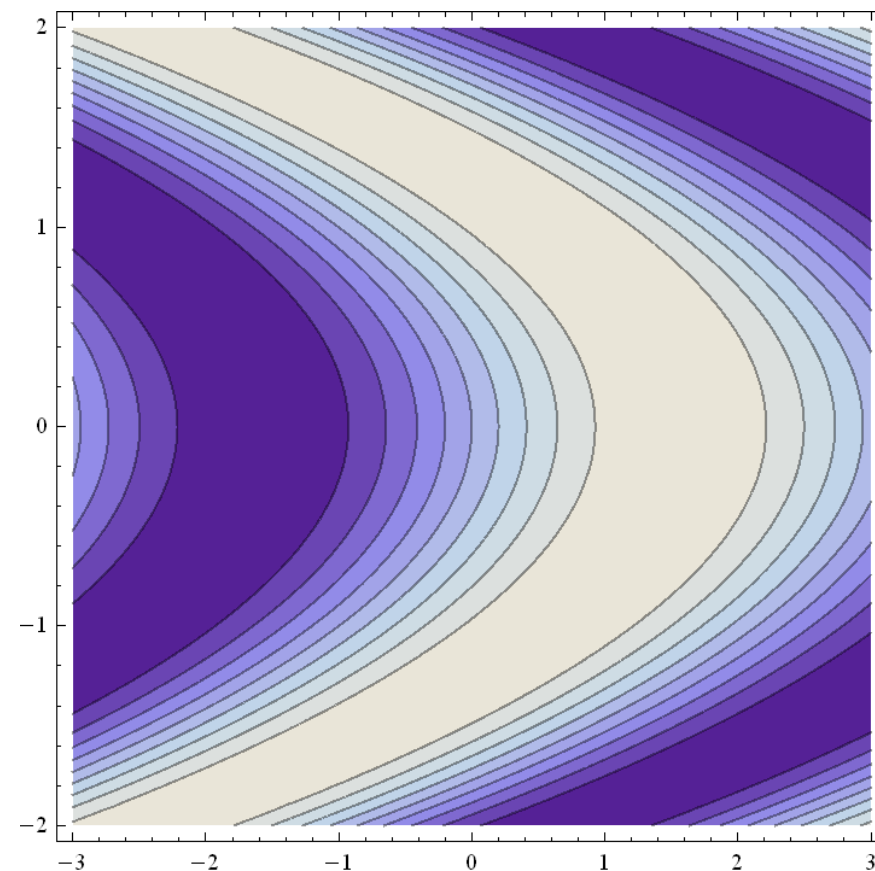
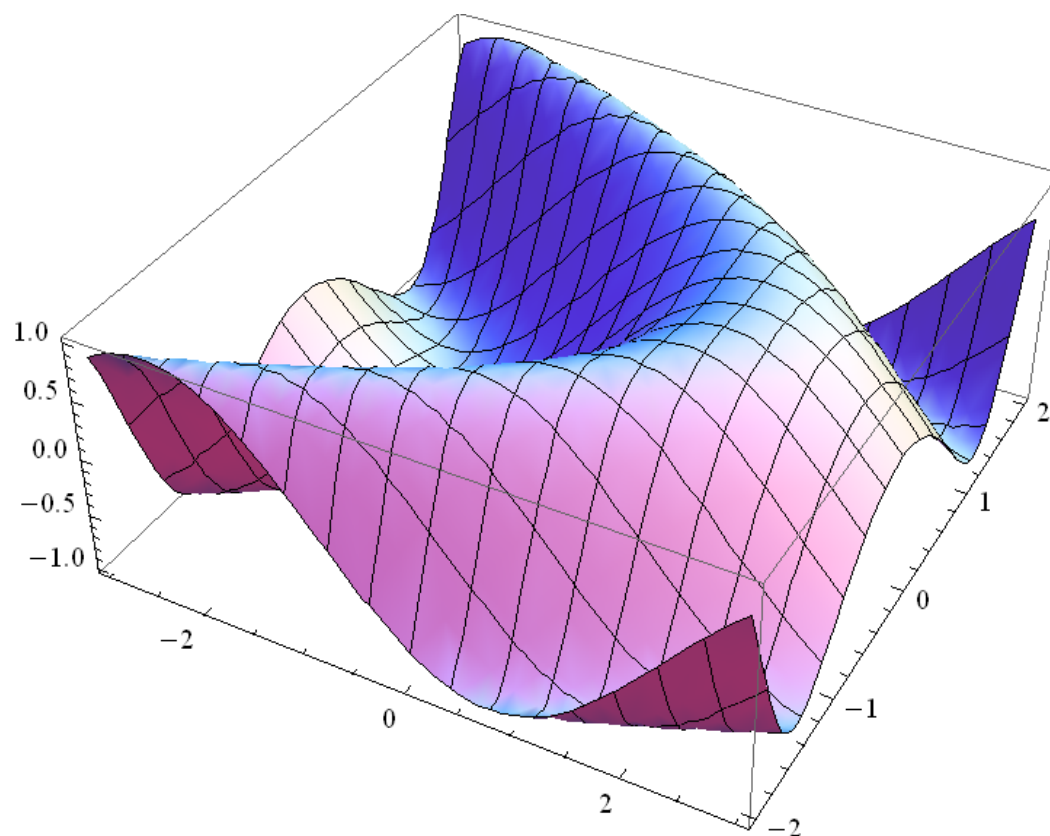
$$F(x, y, z) = x^3 + y^2 - z^2$$



$$F(x, y, z) = \sin(x + y^2) + z$$

Rovinné skalárne pole $U(x, y) = C$

Ekvipotenciálne hladinové krivky – vrstevnice grafu funkcie dvoch premenných $U(x, y) = \sin(x + y^2)$



Derivácia funkcie v danom smere

Funkcia $f(x, y, z)$ diferencovateľná v bode X_0 má v tomto bode deriváciu podľa ľubovoľného smeru s a platí

$$f'_s(X_0) = f'_x(X_0)\cos \alpha + f'_y(X_0)\cos \beta + f'_z(X_0)\cos \gamma$$

kde $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ sú smerové kosíny vektora s .

Ak $s = \mathbf{i}$, tak $\alpha = 0, \beta = \pi/2$, a $\gamma = \pi/2, f'_i(X_0) = f'_x(X_0)$

pre $s = \mathbf{j}$, tak $\alpha = \pi/2, \beta = 0$, a $\gamma = \pi/2, f'_j(X_0) = f'_y(X_0)$

a pre $s = \mathbf{k}$, tak $\alpha = \pi/2, \beta = \pi/2$, a $\gamma = 0, f'_k(X_0) = f'_z(X_0)$

Parciálne derivácie funkcie f v bode X_0 podľa premenných x, y, z sú derivácie funkcie f v bode X_0 v smere jednotkových vektorov $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

Derivácia funkcie $f(x, y, z)$ v smere s je skalárny súčin jednotkového vektora $s^0 = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}$ s vektorom $f'_x(X_0)\mathbf{i} + f'_y(X_0)\mathbf{j} + f'_z(X_0)\mathbf{k}$

$$f'_s(X_0) = (f'_x(X_0), f'_y(X_0), f'_z(X_0)) \cdot (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

Gradient skalárnej funkcie $f(x, y, z)$ v bode X_0

$$\text{grad } f(X_0) = f'_x(X_0)\mathbf{i} + f'_y(X_0)\mathbf{j} + f'_z(X_0)\mathbf{k}$$

je vektor, v smere ktorého je derivácia funkcie f v bode X_0 maximálna

a rovná sa veľkosti tohto vektora $[f'_s(X_0)]_{\max} = |\text{grad } f(X_0)|$

$$f'_s(X_0) = |\text{grad } f(X_0)| \cos \varphi$$

kde φ je uhol medzi vektormi $\text{grad } f(X_0)$ a s .

Ak je $\text{grad } f(X_0) = \mathbf{0}$, derivácia funkcie f v bode X_0 v každom smere s sa rovná nule, $f'_s(X_0) = 0$ pre každý vektor s .

Fyzikálny význam gradientu v bode

Hodnoty funkcie $f(x, y, z)$ sa najrýchlejšie menia (rastú) v smere vektora gradientu funkcie, v smere $\text{grad } f(X_0) = (f'_x(X_0), f'_y(X_0), f'_z(X_0))$.

Geometrický význam gradientu v bode

Ak je funkcia f diferencovateľná v bode X_0 a $\text{grad } f(X_0) \neq \mathbf{0}$, teda

$$[f'_x(X_0)]^2 + [f'_y(X_0)]^2 + [f'_z(X_0)]^2 \neq 0$$

potom plocha s rovnicou

$$f'_x(x_0)(x - x_0) + f'_y(x_0)(y - y_0) + f'_z(x_0)(z - z_0) = 0$$

je ekvipotenciálna plocha skalárneho poľa (Ω, f) , ktorá prechádza daným bodom dotyku $X_0 = [x_0, y_0, z_0]$.

Vektor $\text{grad } f(x_0, y_0, z_0) = f'_x(X_0)\mathbf{i} + f'_y(X_0)\mathbf{j} + f'_z(X_0)\mathbf{k}$

je normálový vektor dotykovej roviny k ekvipotenciálnej ploche prechádzajúcej bodom $X_0 = [x_0, y_0, z_0]$.

Derivácia funkcie v smere s v bode X_0 je veľkosť priemetu vektora $\text{grad } f(X_0)$ do vektora s .

Nech (Ω, f) je skalárne pole, a nech je funkcia f diferencovateľná v každom bode $X \in \Omega$. Vektorová funkcia $\mathbf{F} = \text{grad } f$ definovaná na oblasti Ω , ktorá každému bodu $X \in \Omega$ priradí vektor $\text{grad } f(X)$ sa nazýva gradient funkcie f

$$\mathbf{F} = \text{grad } f = f'_x \mathbf{i} + f'_y \mathbf{j} + f'_z \mathbf{k}$$

alebo

$$\mathbf{F} = \text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$$

Vektorová funkcia $\mathbf{F} = \text{grad } f$ sa nazýva gradient skalárneho poľa (Ω, U) .

Každému skalárnemu poľu (Ω, f) prislúcha jednoznačne vektorové pole $(\Omega, \mathbf{F})$, kde $\mathbf{F} = \text{grad } f$, teda vektorové pole gradientov skalárneho poľa.

Gradient skalárneho poľa je diferenciálna charakteristika skalárneho poľa.

Vlastnosti gradientu skalárnej funkcie

$$\text{grad}(f_1 + f_2 + \dots + f_n) = \text{grad } f_1 + \text{grad } f_2 + \dots + \text{grad } f_n$$

$$\text{grad}(f g) = f \text{grad}(g) + g \text{grad}(f)$$

$$\text{grad}(f(g)) = f'(g) \text{grad}(g)$$

$$|\text{grad } f| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$$

Symbolický vektor

sa nazýva **Hamiltonov diferenciálny operátor** $\nabla = \text{nabla}$

$$\text{grad } f = \nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$$

Derivácia funkcie v smere $\mathbf{s}$

$$f'_s(X) = \nabla f \cdot \mathbf{s}_0, \mathbf{s}_0 = \frac{\mathbf{s}}{|\mathbf{s}_0|}$$

Nech $\mathbf{F}$ je vektorová funkcia, ktorá každému bodu $X = (x, y, z) \in \Omega$ priradí vektor priestoru $\mathbf{E}^3$

$$\mathbf{F}(X) = \mathbf{F}(x, y, z) = f_1(x, y, z)\mathbf{i} + f_2(x, y, z)\mathbf{j} + f_3(x, y, z)\mathbf{k}.$$

Dvojicu $(\Omega, \mathbf{F})$ nazývame stacionárne vektorové pole.

Grafom funkcie $\mathbf{F}$ je varieta 6-rozmerného priestoru $\mathbf{E}^6$.

Pomerne názornú predstavu o vektorovom poli dávajú vektorové krivky.

Vektorová krivka k (prúdová krivka - prúdnicca) vektorového poľa $(\Omega, \mathbf{F})$ je regulárna krivka, ktorá sa nachádza v oblasti Ω , je daná parametrizáciou

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, t \in \mathbf{R}$$

a jej vektor dotyčnice $\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}$

v bode $X(t) = [x(t), y(t), z(t)]$, $t \in \mathbf{R}$ je násobkom vektora $\mathbf{F}(X(t))$, platí

$$\frac{x'(t)}{f_1(x, y, z)} = \frac{y'(t)}{f_2(x, y, z)} = \frac{z'(t)}{f_3(x, y, z)}$$

Rovnice

$$\frac{x'(t)}{f_1(x, y, z)} = \frac{y'(t)}{f_2(x, y, z)}$$

$$\frac{x'(t)}{f_1(x, y, z)} = \frac{z'(t)}{f_3(x, y, z)}$$

$$\frac{y'(t)}{f_2(x, y, z)} = \frac{z'(t)}{f_3(x, y, z)}$$

predstavujú systém nelineárnych diferenciálnych rovníc 1. rádu, ktorých riešením sú funkcie $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $t \in \mathbf{R}$ určujúce sústavu vektorových kriviek daného vektorového poľa.

Každým bodom $X_0 \in \Omega$, v ktorom $\mathbf{F}(X_0) \neq \mathbf{0}$, prechádza práve jedna vektorová krivka vektorového poľa $(\Omega, \mathbf{F})$.

Diferenciálne charakteristiky vektorového poľa

Divergencia vektorového poľa (vektorovej funkcie) F v bode je skalár

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (f_1 \mathbf{i} + f_2 \mathbf{j} + f_3 \mathbf{k}) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

Vektorové pole sa nazýva solenoidné (nežriedlové), ak $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$.

Pole s nenulovou divergenciou je žriedlové pole, obsahuje aspoň jedno žriedlo (resp. noru).

Vlastnosti divergencie

$$\operatorname{div} (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \operatorname{div} \mathbf{F} + \operatorname{div} \mathbf{G}$$

$$\operatorname{div} (f \mathbf{F}) = f \operatorname{div} \mathbf{F} + \mathbf{F} \times \operatorname{div} f$$

Rotácia vektorového poľa (vektorovej funkcie F) v bode je vektor

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \times (f_1 \mathbf{i} + f_2 \mathbf{j} + f_3 \mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

Vlastnosti rotácie

$$\text{rot } (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \text{rot } \mathbf{F} + \text{rot } \mathbf{G}, \quad \text{rot } (f \mathbf{F}) = f \text{rot } \mathbf{F} - \mathbf{F} \text{rot } f$$

Pole, ktorého rotácia je nulový vektor, sa nazýva nerotačné (bezvírové) pole. Rotačné pole obsahuje víry v bodoch, kde je rotácia nenulová, vektor rotácie určuje smer rotácie víru v danom bode.

Vektorové pole, ktoré je gradientom skalárneho poľa $f(x, y, z)$ je nerotačné a naopak, každé nerotačné pole sa dá vyjadriť ako gradient skalárneho poľa.

Laplaceov operátor Δ

Skalárny súčin operátora ∇ so sebou samým je Laplaceov operátor (Laplacián) Δ

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Vlastnosti Laplaceovho operátora

$$\Delta(f + g) = \Delta f + \Delta g, \quad \Delta(fg) = f \Delta g + g \Delta f + 2 \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g$$

$$\Delta(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \Delta \mathbf{F} + \Delta \mathbf{G}, \quad \Delta \operatorname{grad} f = \operatorname{grad} (\Delta f)$$

$$\Delta \operatorname{rot} \mathbf{F} = \operatorname{rot} \Delta \mathbf{F}$$

Vzorce pre počítanie s diferenciálnymi operátormi

$$\nabla(f g) = \text{grad } (f g) = f \text{ grad } g + g \text{ grad } f$$

$$\nabla(f \mathbf{F}) = \text{div } (f \mathbf{F}) = f \text{ div } \mathbf{F} + \mathbf{F} \text{ grad } f$$

$$\nabla \times (f \mathbf{F}) = \text{rot } (f \mathbf{F}) = f \text{ rot } \mathbf{F} - \mathbf{F} \times \text{grad } f$$

$$\begin{aligned} \nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = \text{grad } (\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = & \mathbf{F} \times \text{rot } \mathbf{G} + \mathbf{G} \times \text{rot } \mathbf{F} + \\ & + \left(f_1 \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x} + f_2 \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} + f_3 \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial z} \right) + \left(g_1 \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + g_2 \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + g_3 \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

$$\nabla (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \text{div } (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \text{ rot } \mathbf{F} - \mathbf{F} \times \text{rot } \mathbf{G}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \text{rot } (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = & \mathbf{F} \text{ div } \mathbf{G} - \mathbf{G} \text{ div } \mathbf{F} + \\ & + \left(g_1 \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + g_2 \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + g_3 \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z} \right) - \left(f_1 \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x} + f_2 \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} + f_3 \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

$$\nabla^2 f = \nabla \nabla f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \Delta f$$

$$\nabla \times (\nabla f) = \operatorname{rot} \operatorname{grad} f = \mathbf{0}$$

$$\nabla(\nabla \mathbf{F}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{F} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{F} + \Delta \mathbf{F}$$

$$\nabla(\nabla \times \mathbf{F}) = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

3 základné vzt'ahy

$$\nabla f = \operatorname{grad} f$$

$$\nabla \mathbf{F} = \operatorname{div} \mathbf{F}$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \operatorname{rot} \mathbf{F}$$