

Plochy priestoru E^3

Nech je na súvislej oblasti $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ definovaná vektorová funkcia dvoch premenných

$$\mathbf{p}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), (u, v) \in \Omega,$$

ktorej skalárne súradnicové funkcie $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ sú aspoň raz diferencovateľné na oblasti Ω .

Hodografom vektorovej funkcie $\mathbf{p}(u, v)$ je jednoducho súvislá plocha χ priestoru $\mathbf{E}^3$.

Pre každú usporiadanú dvojicu reálnych čísel $(u_0, v_0) \in \Omega$ je funkčnou hodnotou polohový vektor $\mathbf{p}(u_0, v_0) = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$ bodu plochy $P(u_0, v_0)$, ktorého karteziánske súradnice sú

$$P(u_0, v_0) = [x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0)].$$

Dvojicu čísel $(u_0, v_0) \in \Omega$ nazývame krivočiare súradnice bodu na ploche.

Ak je oblasť $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ regulárnou oblasťou, ktorej hranicou je uzavretá regulárna krivka $\mathbf{E}^2$, potom plochu nazývame elementárna plocha, alebo list.

Všetky body plochy určené krivočiarymi súradnicami

$$(u, v_0) \in \Omega, v_0 = \text{const.}, \text{ resp. } (u_0, v) \in \Omega, u_0 = \text{const.},$$

ležia na krivke plochy, ktorú nazývame

parametrická u -krivka plochy - $\mathbf{p}(u, v_0) = (x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0))$

resp. parametrická v -krivka plochy - $\mathbf{p}(u_0, v) = (x(u_0, v), y(u_0, v), z(u_0, v))$.

Parametrické krivky plochy uvedených dvoch sústav kriviek tvoria krivočiaru sieť plochy, ktorá sa nazýva parametrická sieť kriviek plochy.

Každá krivka jednej sústavy pretína všetky krivky druhej sústavy.

Každým bodom plochy prechádza jedna krivka každej zo sústav, platí

$$P(u_0, v_0) = \mathbf{p}(u, v_0) \cap \mathbf{p}(u_0, v)$$

Bod plochy $P(u_0, v_0)$ sa nazýva regulárny bod plochy, ak v nejakom okolí bodu $(u, v_0) \in \Omega$ existujú spojité prvé parciálne derivácie $\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v$ vektorovej funkcie $\mathbf{p}(u, v)$ a platí

$$\mathbf{p}'_u(u_0, v_0) \times \mathbf{p}'_v(u_0, v_0) \neq \mathbf{0}$$

V opačnom prípade, keď sú vektory $\mathbf{p}'_u(u_0, v_0), \mathbf{p}'_v(u_0, v_0)$ lineárne závislé, hovoríme o singulárnom bode plochy.

Vektorové funkcie

$$\mathbf{p}'_u(u, v_0) = (x'_u(u, v_0), y'_u(u, v_0), z'_u(u, v_0))$$

$$\mathbf{p}'_v(u_0, v) = (x'_v(u_0, v), y'_v(u_0, v), z'_v(u_0, v))$$

definujú smerové polia vektorov dotyčníc parametrických kriviek plochy prechádzajúcich regulárnym bodom $P(u_0, v_0)$ plochy.

V každom regulárnom bode plochy $P(u_0, v_0)$ existujú 2 lineárne nezávislé vektory - vektor dotyčnice parametrickej u -krivky a vektor dotyčnice parametrickej v -krivky,

$$\mathbf{p}'_u(u_0, v_0) = (x'_u(u_0, v_0), y'_u(u_0, v_0), z'_u(u_0, v_0))$$

$$\mathbf{p}'_v(u_0, v_0) = (x'_v(u_0, v_0), y'_v(u_0, v_0), z'_v(u_0, v_0))$$

ktoré určujú jedinú dotykovú rovinu plochy v danom bode

$$\tau = (P, \mathbf{p}'_u, \mathbf{p}'_v)$$

rovnica dotykovej roviny $[\mathbf{P} - \mathbf{p}, \mathbf{p}'_u, \mathbf{p}'_v] = 0$

$$\begin{vmatrix} X - x(u_0, v_0) & Y - y(u_0, v_0) & Z - z(u_0, v_0) \\ x'_u(u_0, v_0) & y'_u(u_0, v_0) & z'_u(u_0, v_0) \\ x'_v(u_0, v_0) & y'_v(u_0, v_0) & z'_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0$$

Vektor

$$\mathbf{n}(u_0, v_0) = \mathbf{p}'_u(u_0, v_0) \times \mathbf{p}'_v(u_0, v_0) \neq \mathbf{0}$$

sa nazýva vektor normály plochy v regulárnom bode $P(u_0, v_0)$.

Priamka určená smerovým vektorom $\mathbf{n}$ a prechádzajúca bodom $P(u_0, v_0)$ je normála plochy kolmá na dotykovú rovinu τ plochy v danom bode.

Vektorová funkcia

$$\mathbf{n}(u, v) = \frac{\mathbf{p}'_u(u, v) \times \mathbf{p}'_v(u, v)}{|\mathbf{p}'_u(u, v) \times \mathbf{p}'_v(u, v)|}$$

definuje smerové pole normál plochy v regulárnych bodoch a určuje orientáciu plochy. Hodnota funkcie $\mathbf{n}(u, v)$ je jednotkový vektor, ktorého súradnice sú smerové kosíny normály plochy v jej regulárnom bode, platí

$$\mathbf{n} = \cos\alpha \mathbf{i} + \cos\beta \mathbf{j} + \cos\gamma \mathbf{k}$$

kde α, β, γ sú uhly vektora $\mathbf{n}$ s jednotkovými vektormi $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

Nech $\mathbf{p}(u(t), v(t))$, $t \in I$ je krivka na ploche $\mathbf{p}(u, v)$, $(u, v) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$.
 Dotykový vektor krivky je vektor vyjadrený pomocou diferenciálu

$$d\mathbf{p} = (\mathbf{p}'_u u' + \mathbf{p}'_v v') dt$$

Pre štvorec diferenciálu platí

$$|d\mathbf{p}|^2 = \mathbf{p}'_u \mathbf{p}'_u du^2 + 2 \mathbf{p}'_u \mathbf{p}'_v du dv + \mathbf{p}'_v \mathbf{p}'_v dv^2$$

Označme

$$E = \mathbf{p}'_u \mathbf{p}'_u, F = \mathbf{p}'_u \mathbf{p}'_v, G = \mathbf{p}'_v \mathbf{p}'_v$$

Výraz

$$E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

nazývame **prvá základná diferenciálna forma plochy**,
 resp. prvý tenzor plochy, označujeme tiež φ_1 .

Prvá základná forma plochy φ_1 opisuje vnútorné vlastnosti geometrie plochy – dĺžky a uhly oblúkov kriviek plochy.

Výraz $D_1 = EG - F^2$ nazývame **diskriminant prvej základnej formy**.

Prvá základná forma plochy φ_1 je v každom regulárnom bode plochy pozitívne definitná symetrická forma, platí:

$$1. E = |\mathbf{p}_u|^2 > 0, G = |\mathbf{p}_v|^2 > 0$$

$$2. EG - F^2 = |\mathbf{p}_u|^2 |\mathbf{p}_v|^2 - |\mathbf{p}_u \mathbf{p}_v|^2 = |\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v|^2 > 0$$

3. symetrická = skalárny súčin je komutatívny

Dĺžka oblúka krivky na ploche

Nech $\mathbf{p}(u(t), v(t))$, $t \in \langle a, b \rangle$ je krivka na ploche $\mathbf{p}(u, v)$, $(u, v) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, ktorej prvá základná forma je $ds^2 = Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2$

Potom pre dĺžku oblúka $s(A, B)$, kde $A = \mathbf{p}(u(a), v(a))$, $B = \mathbf{p}(u(b), v(b))$ platí

$$s(A, B) = \int_a^b \sqrt{ds^2} = \int_a^b \sqrt{E(t)(u'(t))^2 + 2F(t)u'(t)v'(t) + G(t)(v'(t))^2} dt$$

Uhol dvoch kriviek plochy

Nech sú krivky k_1 a k_2 dané svojimi parametrizáciami

$u_1(t), v_1(t)$ a $u_2(t), v_2(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$

na ploche $\mathbf{p}(u, v)$, $(u, v) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ a nech sa pretínajú v bode $P(u_0, v_0)$ plochy, ktorého krivočiara súradnica na krivke k_1 je t_1 a na krivke k_2 je t_2 .

Uhol ω kriviek vypočítame ako uhol vektorov dotyčníc $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ kriviek, platí

$$\cos \omega = \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{|\mathbf{p}_1| |\mathbf{p}_2|} = \frac{Eu'_1(t_1)u'_2(t_2) + 2F(u'_1(t_1)v'_2(t_2) + u'_2(t_2)v'_1(t_1)) + Gv'_1(t_1)v'_2(t_2)}{\sqrt{E(u'_1(t_1))^2 + 2Fu'_1(t_1)v'_1(t_1) + G(v'_1(t_1))^2} \sqrt{E(u'_2(t_2))^2 + 2Fu'_2(t_2)v'_2(t_2) + G(v'_2(t_2))^2}}$$

Pre uhol parametrických kriviek v bode $P(u, v)$ platí

$$\cos \omega = \frac{\mathbf{p}'_u \cdot \mathbf{p}'_v}{|\mathbf{p}'_u| |\mathbf{p}'_v|} = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

Obsah jednoduchého listu plochy

Plošný element na ploche určenej vektorovou funkciou $\mathbf{p}(u, v)$ diferencovateľnou na oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je rovnobežník v dotykovej rovine plochy určený vektormi $\mathbf{p}_u du$ a $\mathbf{p}_v dv$ zvierajúcimi uhol α

$$\begin{aligned} |dS| &= |\mathbf{p}'_u du| \cdot |\mathbf{p}'_v dv| \sin \alpha = |\mathbf{p}'_u du \times \mathbf{p}'_v dv| = |\mathbf{p}'_u \times \mathbf{p}'_v| \cdot |dudv| = \\ &= \sqrt{(\mathbf{p}'_u \times \mathbf{p}'_v)(\mathbf{p}'_u \times \mathbf{p}'_v)} |dudv| = \sqrt{EG - F^2} dudv \end{aligned}$$

Obsah listu plochy definovaného na oblasti Ω vypočítame pomocou dvojného integrálu plošného elementu plochy

$$\sigma(S) = \iint_{\Omega} |\mathbf{p}'_u(u, v) \times \mathbf{p}'_v(u, v)| dudv = \iint_{\Omega} \sqrt{D_1} dudv$$

Druhá základná diferenciálna forma plochy, druhý tenzor plochy súvisí s krivosťou plochy v regulárnom bode plochy a označuje sa

$$\varphi_2 = \mathbf{n} \cdot d^2 \mathbf{p} = L du^2 + 2M du dv + N dv^2$$

pričom pre koeficienty druhej základnej formy plochy platí

$$L = \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}_{uu}'' = \frac{(\mathbf{p}_u' \times \mathbf{p}_v') \cdot \mathbf{p}_{uu}''}{|\mathbf{p}_u' \times \mathbf{p}_v'|} = \frac{[\mathbf{p}_u', \mathbf{p}_v', \mathbf{p}_{uu}'']}{\sqrt{D_1}}$$

$$M = \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}_{uv}'' = \frac{(\mathbf{p}_u' \times \mathbf{p}_v') \cdot \mathbf{p}_{uv}''}{|\mathbf{p}_u' \times \mathbf{p}_v'|} = \frac{[\mathbf{p}_u', \mathbf{p}_v', \mathbf{p}_{uv}'']}{\sqrt{D_1}}$$

$$N = \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}_{vv}'' = \frac{(\mathbf{p}_u' \times \mathbf{p}_v') \cdot \mathbf{p}_{vv}''}{|\mathbf{p}_u' \times \mathbf{p}_v'|} = \frac{[\mathbf{p}_u', \mathbf{p}_v', \mathbf{p}_{vv}'']}{\sqrt{D_1}}$$

Výraz $D_2 = LN - M^2$ nazývame diskriminant druhej základnej formy plochy.

Číslo

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{D_2}{D_1}$$

sa nazýva úplná, alebo Gaussova krivosť plochy v danom bode.

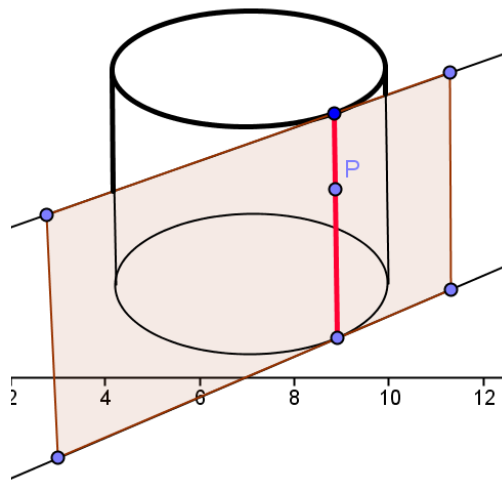
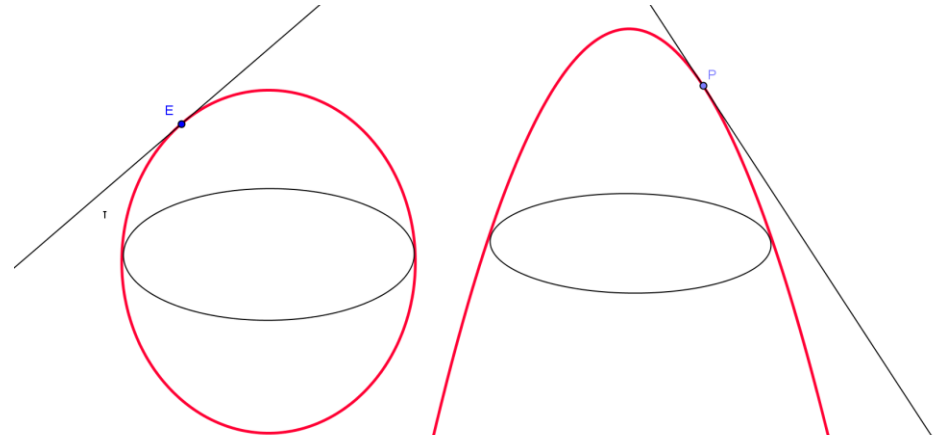
Bod, v ktorom $K > 0$, sa nazýva eliptický bod plochy. V tomto bode má dotyková rovina plochy spoločný s plochou iba bod dotyku, pričom plocha sa nachádza v jednom polpriestore určenom dotykovou rovinou a vektorom normály plochy v danom bode.

Bod, v ktorom $K < 0$, sa nazýva hyperbolický bod plochy. V tomto bode dotyková rovina plochy pretína plochu v krivke, ktorá má v bode dotyku dvojnásobný bod.

Bod, v ktorom $K = 0$, je parabolický bod plochy, dotyková rovina sa plochy dotýka v krivke, pričom plocha sa nachádza v jednom polpriestore určenom dotykovou rovinou a vektorom normály plochy v danom bode.

Theorema egregium - Gaussova krivosť plochy sa dá vyjadriť iba pomocou koeficientov prvej základnej formy plochy a ich derivácií.

Plochy obsahujúce iba eliptické body
gul'ová plocha, elipsoid
paraboloid

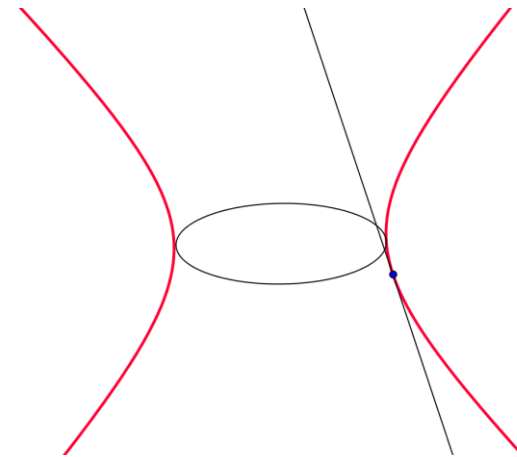


Plochy obsahujúce iba parabolické body

rovina

valcová plocha

kužel'ová plocha



Plochy obsahujúce iba hyperbolické body
hyperboloid
pseudosféra

Plocha obsahujúca všetky typy bodov
anuloid

