

Operácie s vektorovými funkciami

Nech sú na množine M definované vektorové funkcie $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{r}_1(t)$, $\mathbf{r}_2(t)$ a skalárna funkcia $\varphi(t)$.

Pre každé reálne číslo t_0 sú funkčné hodnoty $\mathbf{r}(t_0)$, $\mathbf{r}_1(t_0)$, $\mathbf{r}_2(t_0)$ vektory a funkčná hodnota $\varphi(t_0)$ skalár (číslo).

Každému reálnemu číslu $t_0 \in M$ môžeme priradiť hodnoty

1. vektor $\mathbf{r}_1(t_0) + \mathbf{r}_2(t_0)$
2. vektor $\varphi(t_0)\mathbf{r}(t_0)$
3. skalár $\mathbf{r}_1(t_0) \cdot \mathbf{r}_2(t_0)$
4. vektor $\mathbf{r}_1(t_0) \times \mathbf{r}_2(t_0)$ pre trojrozmerné funkcie

Tým sú na M definované nasledujúce funkcie

1. súčet vektorových funkcií - vektorová funkcia $\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)$
2. súčin skalárnej a vektorovej funkcie – vektorová funkcia $\varphi(t)\mathbf{r}(t)$
3. skalárny súčin vektorových funkcií - skalárna funkcia $\mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t)$
4. vektorový súčin vektorových funkcií – vektorová funkcia $\mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t)$

Nech

$$\mathbf{r}(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$$

$$\mathbf{r}_1(t) = (g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t))$$

$$\mathbf{r}_2(t) = (h_1(t), h_2(t), \dots, h_n(t))$$

Potom

$$1. \quad \mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t) = (g_1(t) + h_1(t), g_2(t) + h_2(t), \dots, g_n(t) + h_n(t))$$

$$2. \quad \varphi(t)\mathbf{r}(t) = (\varphi(t)f_1(t), \varphi(t)f_2(t), \dots, \varphi(t)f_n(t))$$

$$3. \quad \mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t) = g_1(t)h_1(t) + g_2(t)h_2(t) + \dots + g_n(t)h_n(t) = \text{skalárna funkcia}$$

$$4. \quad \text{pre } \mathbf{r}_1(t) = (x_1(t), y_1(t), z_1(t)), \mathbf{r}_2(t) = (x_2(t), y_2(t), z_2(t))$$

$$\mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1(t) & y_1(t) & z_1(t) \\ x_2(t) & y_2(t) & z_2(t) \end{vmatrix} =$$

$$= (y_1(t)z_2(t) - y_2(t)z_1(t), x_2(t)z_1(t) - x_1(t)z_2(t), x_1(t)y_2(t) - x_2(t)y_1(t))$$

Nech vektorové funkcie $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{r}_1(t)$, $\mathbf{r}_2(t)$ a skalárna funkcia $\varphi(t)$ majú v bode $t_0 \in M$ limitu - vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ a číslo k , potom aj funkcie $\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)$, $\varphi(t)\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{r}_1(t).\mathbf{r}_2(t)$ a $\mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t)$ majú v bode $t_0 \in M$ limitu a platí

$$1. \quad \lim_{t \rightarrow t_0} [\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)] = \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}_1(t) + \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$$

$$2. \quad \lim_{t \rightarrow t_0} [\varphi(t)\mathbf{r}(t)] = \left[\lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t) \right] \cdot \left[\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) \right] = k\mathbf{a}$$

$$3. \quad \lim_{t \rightarrow t_0} [\mathbf{r}_1(t).\mathbf{r}_2(t)] = \left[\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}_1(t) \right] \cdot \left[\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}_2(t) \right] = \mathbf{a}_1.\mathbf{a}_2$$

$$4. \quad \lim_{t \rightarrow t_0} [\mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t)] = \left[\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}_1(t) \right] \times \left[\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}_2(t) \right] = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$$

Nech sú vektorové funkcie $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{r}_1(t)$, $\mathbf{r}_2(t)$ a skalárna funkcia $\varphi(t)$ spojité v bode $t_0 \in M$, potom aj funkcie $\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)$, $\varphi(t)\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t)$ a $\mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t)$ sú spojité v bode $t_0 \in M$.

Nech vektorové funkcie $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{r}_1(t)$, $\mathbf{r}_2(t)$ a skalárna funkcia $\varphi(t)$ majú na množine M deriváciu, potom aj funkcie $\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)$, $\varphi(t)\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t)$ a $\mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t)$ majú na množine M deriváciu a platí

$$\begin{aligned} 1. \quad [\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)]' &= \mathbf{r}_1'(t) + \mathbf{r}_2'(t) = \\ &= (g_1'(t) + h_1'(t), g_2'(t) + h_2'(t), \dots, g_n'(t) + h_n'(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad [\varphi(t)\mathbf{r}(t)]' &= \varphi'(t)\mathbf{r}(t) + \varphi(t)\mathbf{r}'(t) = \\ &= (\varphi'(t)g_1(t) + \varphi(t)g_1'(t), \varphi'(t)g_2(t) + \varphi(t)g_2'(t), \dots, \varphi'(t)g_n(t) + \varphi(t)g_n'(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad [\mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t)]' &= \mathbf{r}_1'(t) \cdot \mathbf{r}_2(t) + \mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2'(t) = \\ &= g_1' \cdot h_1 + g_1 \cdot h_1' + g_2' \cdot h_2 + g_2 \cdot h_2' + \dots + g_n' \cdot h_n + g_n \cdot h_n' \end{aligned}$$

$$4. \quad [\mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t)]' = \mathbf{r}_1'(t) \times \mathbf{r}_2(t) + \mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2'(t)$$

Pravidlá pre derivovanie vektorových operácií

Nech vektorové funkcie $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{r}_1(t)$, $\mathbf{r}_2(t)$ a skalárna funkcia $\varphi(t)$ majú na množine M spojitú deriváciu, potom aj funkcie $\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)$, $\varphi(t)\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{r}_1(t).\mathbf{r}_2(t)$ a $\mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t)$ majú na množine M spojitú deriváciu a platí

$$1. \quad [\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)]'' = \mathbf{r}_1''(t) + \mathbf{r}_2''(t)$$

$$\begin{aligned} 2. \quad [\varphi(t)\mathbf{r}(t)]'' &= [\varphi'(t)\mathbf{r}(t) + \varphi(t)\mathbf{r}'(t)]' = \\ &= \varphi''(t)\mathbf{r}(t) + 2\varphi'(t)\mathbf{r}'(t) + \varphi(t)\mathbf{r}''(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad [\mathbf{r}_1(t).\mathbf{r}_2(t)]'' &= [\mathbf{r}_1'(t).\mathbf{r}_2(t) + \mathbf{r}_1(t).\mathbf{r}_2'(t)]' = \\ &= \mathbf{r}_1''(t).\mathbf{r}_2(t) + 2\mathbf{r}_1'(t).\mathbf{r}_2'(t) + \mathbf{r}_1(t).\mathbf{r}_2''(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad [\mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t)]'' &= [\mathbf{r}_1'(t) \times \mathbf{r}_2(t) + \mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2'(t)]' = \\ &= \mathbf{r}_1''(t) \times \mathbf{r}_2(t) + 2\mathbf{r}_1'(t) \times \mathbf{r}_2'(t) + \mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2''(t) \end{aligned}$$

Všetky uvedené tvrdenia platné pre operácie s vektorovými funkciami jednej premennej platia aj pre vektorové funkcie viac premenných.

Vektorová funkcia $\mathbf{f}(X) = (f_1(X), f_2(X), \dots, f_n(X))$, $X = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ má v bode X_0 limitu $\mathbf{a}$ práve vtedy, ak v tomto bode majú limitu všetky skalárne súradnicové funkcie $f_1(X), f_2(X), \dots, f_n(X)$ a platí

$$\lim_{X \rightarrow X_0} f_1(X) = a_1, \lim_{X \rightarrow X_0} f_2(X) = a_2, \dots, \lim_{X \rightarrow X_0} f_n(X) = a_n$$

$$\begin{aligned} \lim_{X \rightarrow X_0} \mathbf{f}(X) &= \lim_{X \rightarrow X_0} [(f_1(X), f_2(X), \dots, f_n(X))] = \\ &= (\lim_{X \rightarrow X_0} f_1(X), \lim_{X \rightarrow X_0} f_2(X), \dots, \lim_{X \rightarrow X_0} f_n(X)) = (a_1, a_2, \dots, a_n) = \mathbf{a} \end{aligned}$$

Limita vektorovej funkcie $\mathbf{f}(X)$ v bode X_0 je vektor $\mathbf{a}$, ktorého zložky sa rovnajú limitám skalárnych súradnicových funkcií $f_i(X)$ v bode X_0 .

Vektorová funkcia $\mathbf{f}(X) = (f_1(X), f_2(X), \dots, f_n(X))$, $X = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ má v bode A parciálnu deriváciu podľa premennej t_j práve vtedy, ak majú v tomto bode parciálne derivácie všetky skalárne súradnicové funkcie $f_1(X), f_2(X), \dots, f_n(X)$ a platí

$$\mathbf{f}'_{t_j}(A) = \frac{\partial \mathbf{f}(A)}{\partial t_j} = \left(\frac{\partial f_1(A)}{\partial t_j}, \frac{\partial f_2(A)}{\partial t_j}, \dots, \frac{\partial f_n(A)}{\partial t_j} \right)$$

Obdobne možno definovať parciálne derivácie funkcie viac premenných ako funkcie definované na oblasti M s oborom hodnôt vo vektorovom priestore $V^n(\mathbf{R})$.

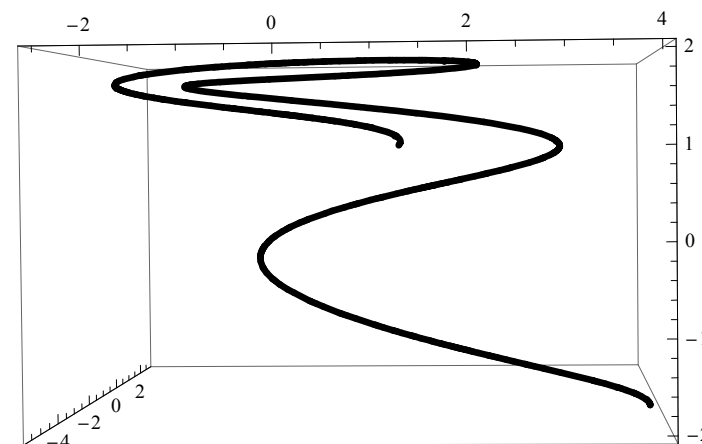
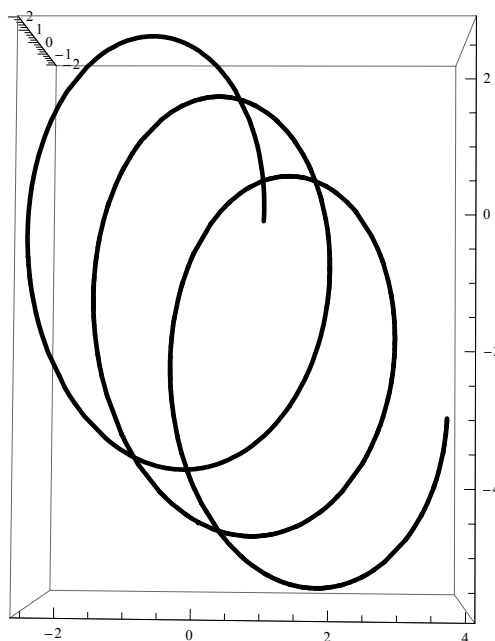
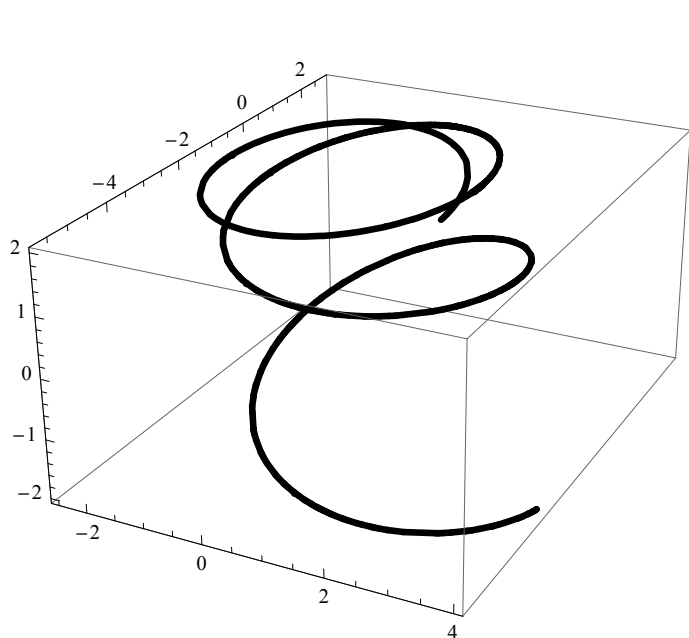
$$\mathbf{f}'_{t_j}(X) = \frac{\partial \mathbf{f}(X)}{\partial t_j} = \left(\frac{\partial f_1(X)}{\partial t_j}, \frac{\partial f_2(X)}{\partial t_j}, \dots, \frac{\partial f_n(X)}{\partial t_j} \right)$$

Trojrozmerná vektorová funkcia jednej premennej
definovaná na intervale $t \in I \subset \mathbf{R}$

$$\mathbf{f}(t) = x(t).\mathbf{i} + y(t).\mathbf{j} + z(t).\mathbf{k} = (x(t), y(t), z(t))$$

hodografom je krivka priestoru $\mathbf{E}^3$

$$\mathbf{f}'(t) = x'(t).\mathbf{i} + y'(t).\mathbf{j} + z'(t).\mathbf{k} = (x'(t), y'(t), z'(t))$$



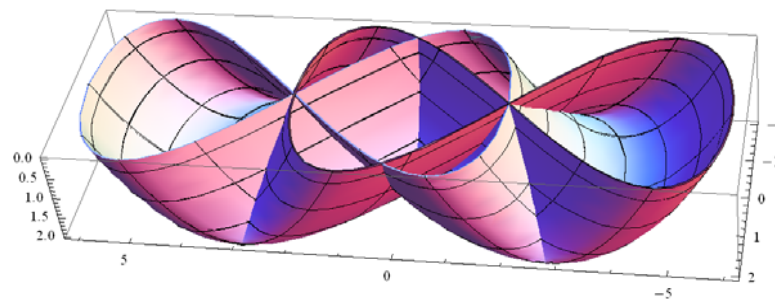
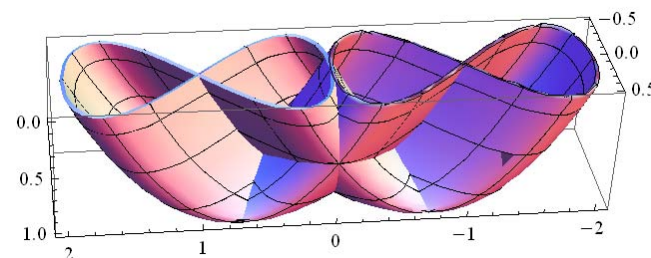
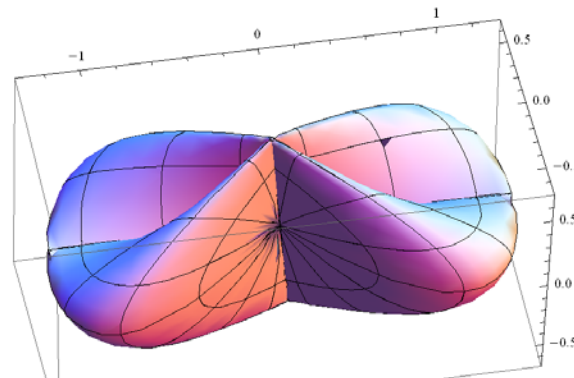
Trojrozmerná vektorová funkcia dvoch premenných
definovaná na dvojrozsmernej oblasti $(u, v) \in \Omega \subset \mathbf{R}^2$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(u, v) &= x(u, v).\mathbf{i} + y(u, v).\mathbf{j} + z(u, v).\mathbf{k} = \\ &= (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned}$$

hodografom je plocha priestoru $\mathbf{E}^3$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_u(u, v) &= x_u(u, v).\mathbf{i} + y_u(u, v).\mathbf{j} + z_u(u, v).\mathbf{k} = \\ &= (x_u(u, v), y_u(u, v), z_u(u, v)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_v(u, v) &= x_v(u, v).\mathbf{i} + y_v(u, v).\mathbf{j} + z_v(u, v).\mathbf{k} = \\ &= (x_v(u, v), y_v(u, v), z_v(u, v)) \end{aligned}$$



Trojrozmerná vektorová funkcia troch premenných
definovaná na trojrozmiernej oblasti $(u, v, w) \in \Omega \subset \mathbf{R}^3$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(u, v, w) &= x(u, v, w) \cdot \mathbf{i} + y(u, v, w) \cdot \mathbf{j} + z(u, v, w) \cdot \mathbf{k} = \\ &= (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \end{aligned}$$

hodografom je teleso (masív) v priestore $\mathbf{E}^3$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_u(u, v, w) &= x_u(u, v, w) \cdot \mathbf{i} + y_u(u, v, w) \cdot \mathbf{j} + z_u(u, v, w) \cdot \mathbf{k} = \\ &= (x_u(u, v, w), y_u(u, v, w), z_u(u, v, w)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_v(u, v, w) &= x_v(u, v, w) \cdot \mathbf{i} + y_v(u, v, w) \cdot \mathbf{j} + z_v(u, v, w) \cdot \mathbf{k} = \\ &= (x_v(u, v, w), y_v(u, v, w), z_v(u, v, w)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_w(u, v, w) &= x_w(u, v, w) \cdot \mathbf{i} + y_w(u, v, w) \cdot \mathbf{j} + z_w(u, v, w) \cdot \mathbf{k} = \\ &= (x_w(u, v, w), y_w(u, v, w), z_w(u, v, w)) \end{aligned}$$

