

Vlastnosti vektorových funkcí

Limita vektorovej funkcie

Nech $\mathbf{r} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ je vektorová funkcia premennej (skaláru) t s definičným oborom $M \subset \mathbf{R}$ a nech $t_0 \in M$ je taký bod (číslo), že isté jeho okolie s možnou výnimkou bodu t_0 patrí do M , teda v bode t_0 funkcia nemusí byť definovaná.

Hovoríme, že vektorová funkcia $\mathbf{r}(t)$ má v bode t_0 limitu $\mathbf{a}$ a píšeme

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{a}$$

ak pre každú postupnosť reálnych čísel $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ takú, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t_0, t_n \neq t_0, t_n \in M$$

príslušná postupnosť funkčných hodnôt konverguje k vektoru $\mathbf{a}$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{a} \Leftrightarrow \left[\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t_0, t_n \neq t_0, t_n \in M \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{r}(t_n) = \mathbf{a} \right]$$

Jednostranné limity vektorovej funkcie $\mathbf{r}(t)$ definujeme obdobne, pričom podmienku $t_n \neq t_0$ nahradíme podmienkou:

$t_n < t_0$ pre limitu vektorovej funkcie $\mathbf{r}(t)$ v bode t_0 zľava

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} \mathbf{r}(t) = \mathbf{a}$$

$t_n > t_0$ pre limitu vektorovej funkcie $\mathbf{r}(t)$ v bode t_0 sprava

$$\lim_{t \rightarrow t_0^+} \mathbf{r}(t) = \mathbf{b}$$

Vektorová funkcia $\mathbf{r}(t)$ má v bode t_0 limitu práve vtedy, ak má v tomto bode limitu zľava aj limitu sprava a tieto sa rovnajú

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = \lim_{t \rightarrow t_0^-} \mathbf{r}(t) = \mathbf{a} = \lim_{t \rightarrow t_0^+} \mathbf{r}(t) = \mathbf{b}$$

Vektorová funkcia $\mathbf{r}(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$ má v bode t_0 limitu $\mathbf{a}$ práve vtedy, ak v tomto bode majú limitu všetky skalárne súradnicové funkcie $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ a platí

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f_1(t) = a_1, \lim_{t \rightarrow t_0} f_2(t) = a_2, \dots, \lim_{t \rightarrow t_0} f_n(t) = a_n$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) &= \lim_{t \rightarrow t_0} [(f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))] = \\ &= (\lim_{t \rightarrow t_0} f_1(t), \lim_{t \rightarrow t_0} f_2(t), \dots, \lim_{t \rightarrow t_0} f_n(t)) = (a_1, a_2, \dots, a_n) = \mathbf{a} \end{aligned}$$

Limita vektorovej funkcie $\mathbf{r}(t)$ v bode t_0 je vektor $\mathbf{a}$, ktorého zložky sa rovnajú limitám skalárnych súradnicových funkcií $f_i(t)$ v bode t_0 .

Vektorová funkcia $\mathbf{r}(t)$ je spojitá v bode t_0 ak platí

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0)$$

teda limita funkcie sa rovná hodnote funkcie v tomto bode, teda funkcia je v danom bode definovaná.

Analogicky ako jednostranné limity môžeme definovať spojitosť vektorovej funkcie v bode t_0 zľava

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0)$$

a spojitosť vektorovej funkcie v bode t_0 sprava

$$\lim_{t \rightarrow t_0^+} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0)$$

Vektorová funkcia $\mathbf{r}(t)$ je spojitá v bode t_0 práve vtedy, keď je v tomto bode spojitá zľava aj sprava.

Derivácia vektorovej funkcie

Nech $\mathbf{r}(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$ je vektorová funkcia premennej (skaláru) t s definičným oborom $M \subset \mathbf{R}$ a nech $t_0 \in M$ je taký bod (číslo) z M , že isté jeho okolie patrí do M , teda funkcia **je definovaná** v bode t_0 .

Ak existuje limita

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)}{t - t_0}$$

nazývame ju derivácia vektorovej funkcie v bode t_0 a označujeme

$$\mathbf{r}'(t_0) = \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right]_{t=t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)}{t - t_0}$$

Vektorová funkcia $\mathbf{r}(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$ má v bode t_0 deriváciu $\mathbf{r}'(t_0)$ práve vtedy, ak majú všetky skalárne súradnicové funkcie $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ v tomto bode derivácie $f_1'(t_0), f_2'(t_0), \dots, f_n'(t_0)$ a platí

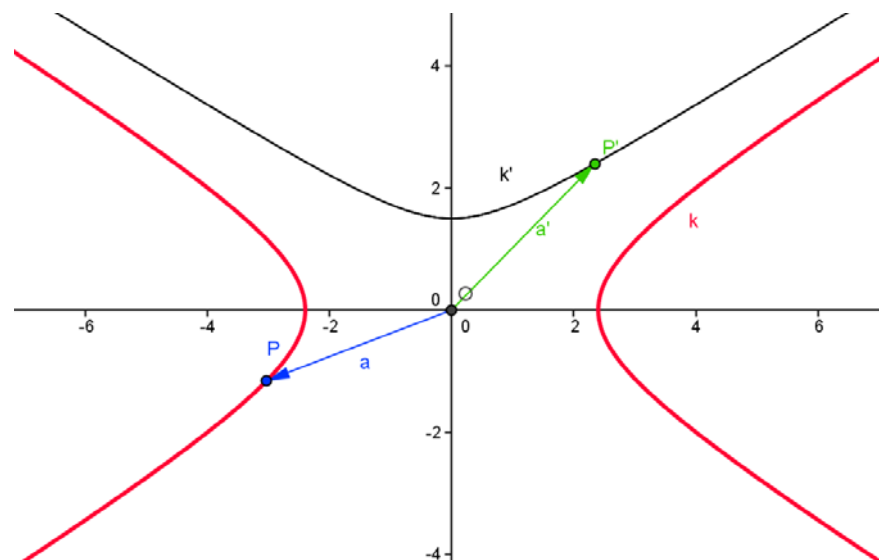
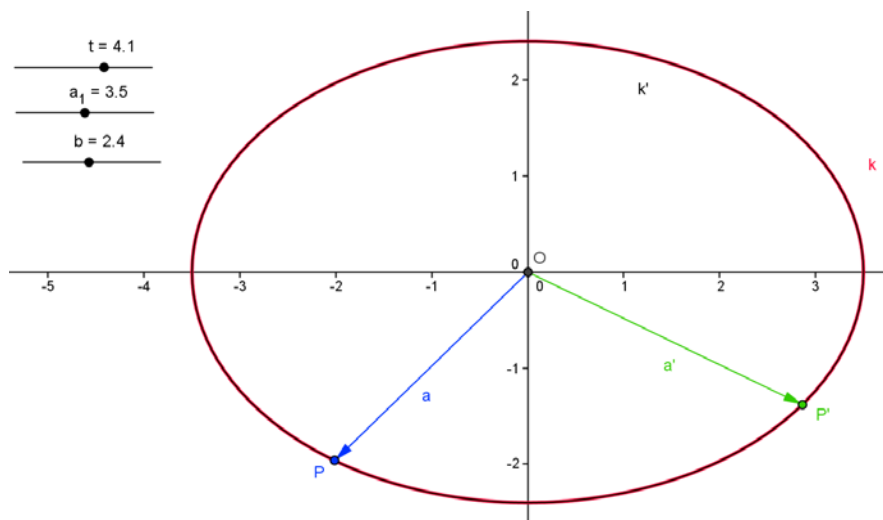
$$\begin{aligned}\mathbf{r}'(t_0) &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)}{t - t_0} = \\ &= \left(\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f_1(t) - f_1(t_0)}{t - t_0}, \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f_2(t) - f_2(t_0)}{t - t_0}, \dots, \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f_n(t) - f_n(t_0)}{t - t_0} \right) = \\ &= (f_1'(t_0), f_2'(t_0), \dots, f_n'(t_0))\end{aligned}$$

Derivácia $\mathbf{r}'(t_0)$ vektorovej funkcie $\mathbf{r}(t)$ v bode t_0 je vektor, ktorého zložky sa rovnajú deriváciám $f_i'(t_0)$ príslušných skalárnych súradnicových funkcií $f_i(t)$ v bode t_0 .

Ak má vektorová funkcia $\mathbf{r}(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$ deriváciu v každom bode svojho oboru definície M , potom má na M deriváciu, ktorá je vektorovu funkciou definovanou na M a platí

$$\mathbf{r}'(t) = (f_1'(t), f_2'(t), \dots, f_n'(t), t \in M$$

Grafom derivácie $\mathbf{r}'(t)$ vektorovej funkcie $\mathbf{r}(t)$ je krivka k' , nazývaná aj derivácia krivky k , ktorá je grafom vektorovej funkcie $\mathbf{r}(t)$.



Derivácie vyšších rádov sa definujú analogicky, teda

$$\begin{aligned}\mathbf{r}''(t_0) &= \left[\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right]_{t=t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\mathbf{r}'(t) - \mathbf{r}'(t_0)}{t - t_0} = \\ &= (f_1''(t_0), f_2''(t_0), \dots, f_n''(t_0))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'''(t_0) &= \left[\frac{d^3 \mathbf{r}}{dt^3} \right]_{t=t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\mathbf{r}''(t) - \mathbf{r}''(t_0)}{t - t_0} = , \text{ atď. pre vyššie rády} \\ &= (f_1'''(t_0), f_2'''(t_0), \dots, f_n'''(t_0))\end{aligned}$$

Geometrická interpretácia derivácie vektorovej funkcie v bode

$\mathbf{r}'(t_0)$ je smerový vektor dotyčnice grafu vektorovej funkcie $\mathbf{r}(t)$

Pre dvojrozmernú vektorovú funkciu definovanú na $I \subset \mathbf{R}$

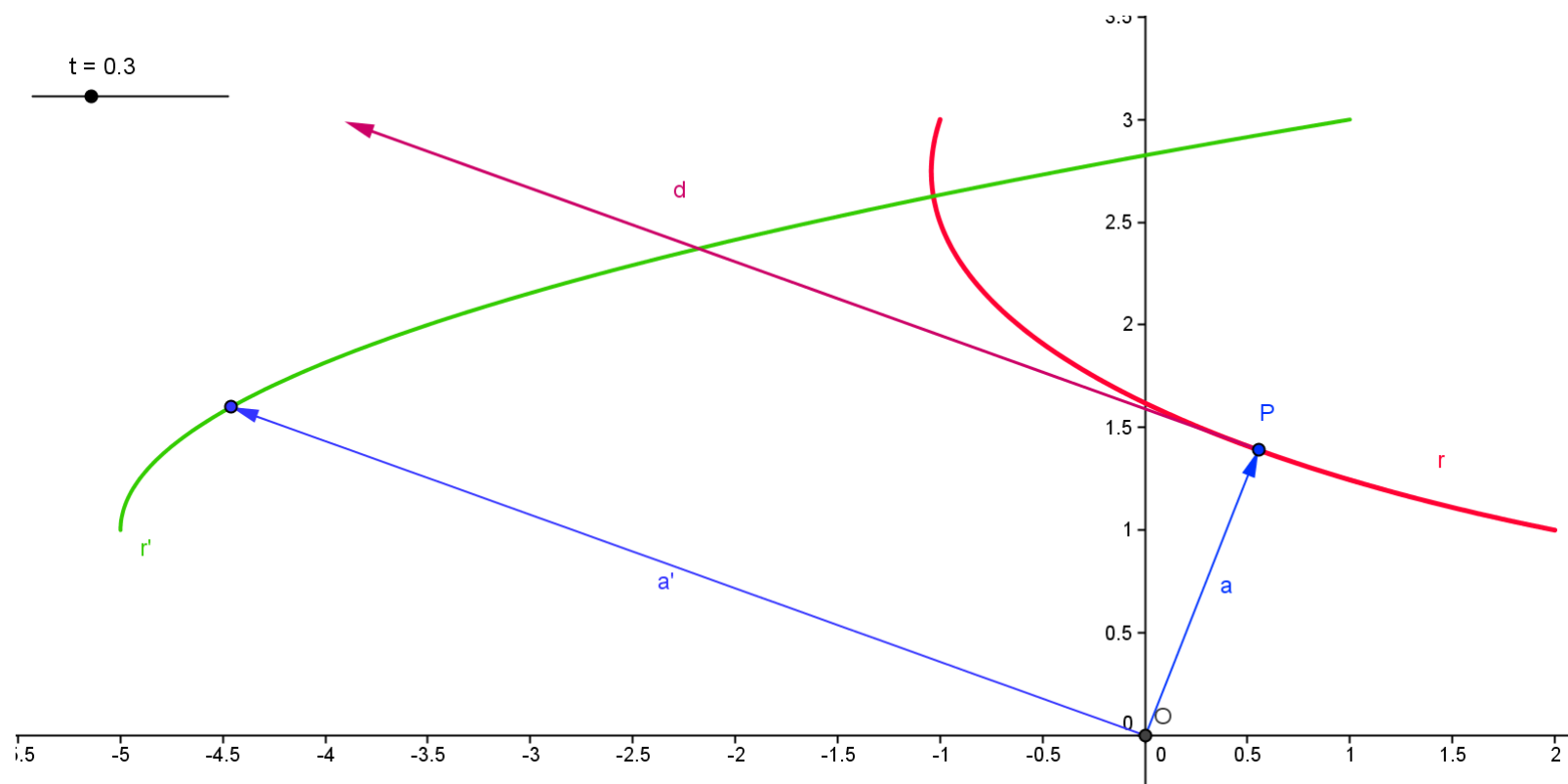
$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$$

je derivácia $\mathbf{r}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$

smerový vektor dotyčnice krivky k ,

ktorá je grafom vektorovej funkcie $\mathbf{r}(t)$ v bode

$$X = [x(t_0), y(t_0)] \in \mathbf{E}^2$$



Krivka $\mathbf{r}(t) = (2t^3 - 5t + 2, t^2 + t + 1)$

Derivácia $\mathbf{r}'(t) = (6t^2 - 5, 2t + 1)$

Pre trojrozmernú vektorovú funkciu definovanú na $I \subset \mathbf{R}$

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

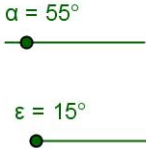
je derivácia $\mathbf{r}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$

smerový vektor dotyčnice krivky K ,

ktorá je grafom vektorovej funkcie

$\mathbf{r}(t)$ v bode

$$X = [x(t_0), y(t_0), z(t_0)] \in \mathbf{E}^3$$



$t_1 = 0.55$

$\mathbf{r}'(t) = (-a\sin(t), b\cos(t), v), t \in <0, 2\pi>$ graf je elipsa v rovine $z = v$
pre $a = b$ kružnica