

Krivky v priestore E^3

Hladká po častiach súvislá krivka k priestoru E^3 je hodografom vektorovej funkcie $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, definovanej na intervale v množine reálnych čísel $I \subset \mathbf{R}$, pričom

1. všetky tri skalárne súradnicové funkcie $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ sú spojité na intervale I
2. majú na I spojité derivácie $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$, z ktorých je aspoň jedna nenulová.

Funkčné hodnoty skalárnych súradnicových funkcií $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ v každom reálnom čísle $t_0 \in I$ určujú karteziánske súradnice bodu krivky

$P(t_0) = [x(t_0), y(t_0), z(t_0)]$, teda koncového bodu vektora

$\mathbf{r}(t_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$, ktorý je hodnotou funkcie $\mathbf{r}(t)$ v bode t_0 .

Číslo $t_0 \in I$ nazývame krivočiara súradnica bodu $P(t_0)$ na krivke k .

Pre $I = \langle a, b \rangle$ hovoríme o oblúku krivky s koncovými bodmi $P(a)$, $P(b)$, pričom oblúk krivky je danou parametrizáciou orientovaný zhodne s orientáciou intervalu I .

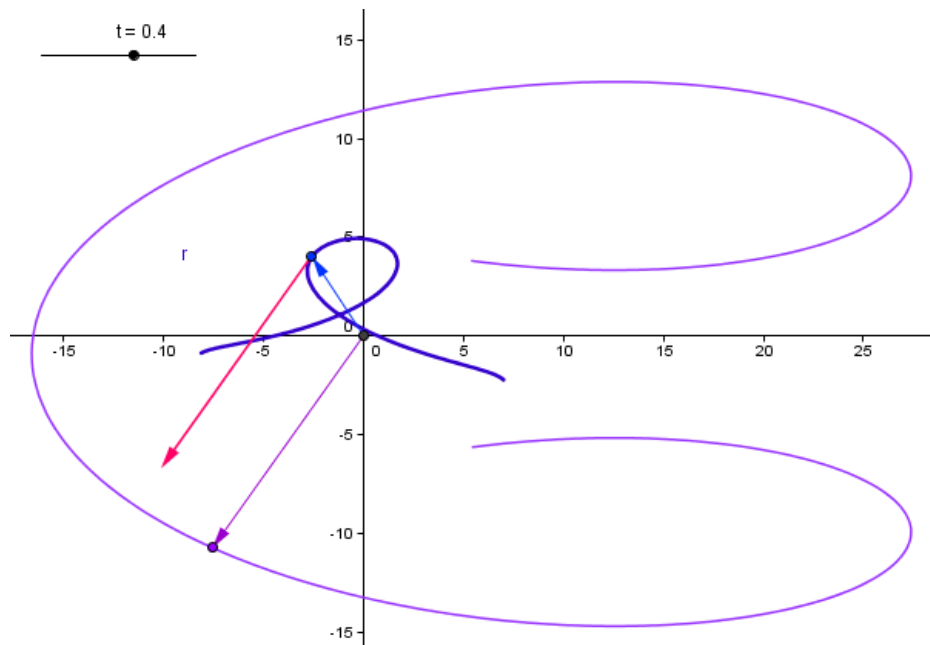
Pre $P(a) = P(b)$ hovoríme o uzavretom oblúku (krivke).

Bod krivky k sa nazýva m -násobný bod, ak existujú také hodnoty premennej $t_i \in I$, $i = 1, 2, \dots, m$, pre ktoré platí

$$\mathbf{r}(t_i) = (x(t_i), y(t_i), z(t_i)) = \mathbf{r}(t_j) = (x(t_j), y(t_j), z(t_j))$$

pre všetky $i, j = 1, 2, \dots, m$

$P(a) = P(b)$ je dvojnásobným bodom uzavretého oblúka krivky definovaného na intervale $I = \langle a, b \rangle$.



Hodnotu vektorovej funkcie $\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ definovanej na intervale $I \subset \mathbf{R}$ v bode $t_0 \in I$, vektor

$$\mathbf{r}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$$

nazývame vektor dotyčnice krivky k v bode $P(t_0)$.

Oborom hodnôt vektorovej funkcie $\mathbf{r}'(t)$ je teda definované smerové pole dotyčníc krivky k v jej bodoch.

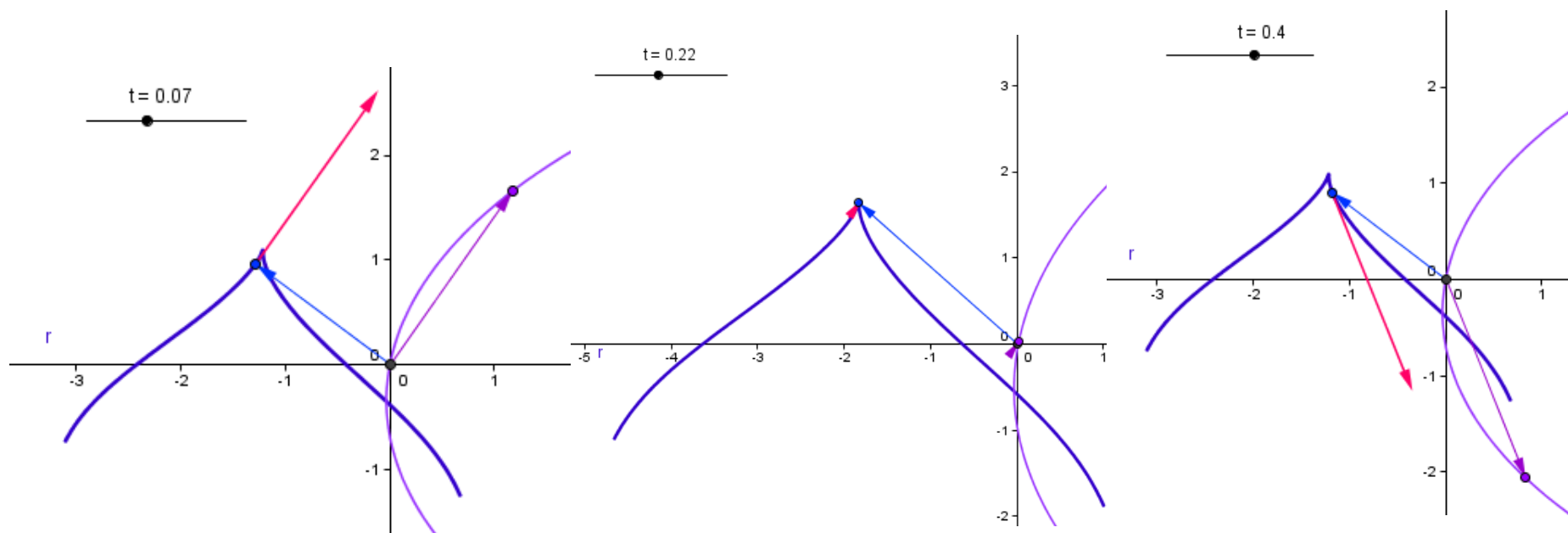
Bod krivky $P(t_0)$ nazývame regulárny bod krivky, ak platí

$$\mathbf{r}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) \neq \mathbf{0}$$

V opačnom prípade hovoríme o singulárnom bode krivky k .

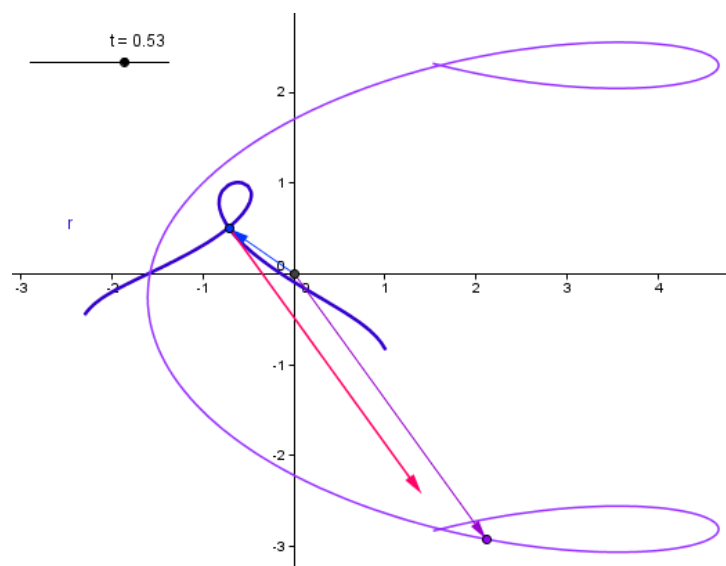
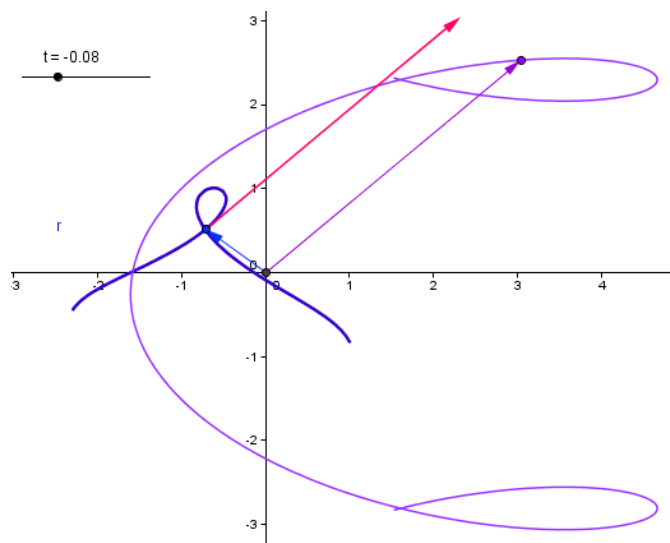
V každom regulárnom bode krivky $P(t_0)$ teda existuje dotyčnica krivky, priamka prechádzajúca daným bodom, ktorej smerový vektor je $\mathbf{r}'(t_0)$. Orientácia vektora $\mathbf{r}'(t_0)$ je zhodná s orientáciou krivky.

Bod krivky, v ktorom sa orientácia mení, sa nazýva bod vratu, alebo aj kuspídálny bod. Je to singulárny bod krivky, v ktorom platí $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{0}$.



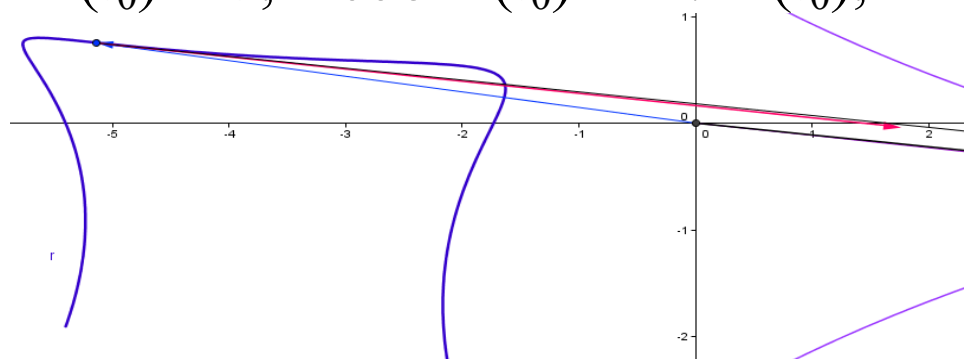
V dvojnásobnom bode krivky platí

$$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}(t_1), \mathbf{r}'(t_0) \neq m \cdot \mathbf{r}'(t_1), m \in \mathbf{R}$$



V inflexnom bode krivky platí

$$\mathbf{r}''(t_0) = \mathbf{0}, \text{ alebo } \mathbf{r}'(t_0) = m \cdot \mathbf{r}''(t_0), m \in \mathbf{R}$$



Dĺžka oblúka krivka definovaného na $I = \langle a, b \rangle$ je hodnota integrálu

$$s = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}'(t)} dt = \int_a^b \sqrt{d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}}$$

Skalárna funkcia $s(t)$

$$s(t) = \int_a^t ds = \int_a^t \sqrt{d^2 \mathbf{r}}, t \in \langle a, b \rangle$$

definuje dĺžku oblúka ako funkciu premennej t na intervale I .

Vlastnosti kriviek budeme opisovať v regulárnych bodoch hladkých oblúkov (kriviek), ktorých určujúce vektorové funkcie $\mathbf{r}(t)$ majú na obore definície, intervale I , spojitú deriváciu až do rádu $n \geq 3$.

teda existujú aspoň

$$\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) \neq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{r}''(t) = (x''(t), y''(t), z''(t)), \quad \mathbf{r}'''(t) = (x'''(t), y'''(t), z'''(t))$$

Prvky Frenet -Serretovho sprievodného trojhranu

Jednotkový vektor dotyčnice krivky k v bode $P(t_0)$ je vektor

$$\mathbf{t}(t_0) = \frac{\mathbf{r}'(t_0)}{|\mathbf{r}'(t_0)|}$$

Vektor $\mathbf{t}$ v ľubovoľnom bode $P(t)$, $t \in I$ sa dá vyjadriť v tvare

$$\mathbf{t} = c(t).\mathbf{r}', c(t) = \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{r}.\mathbf{r}')}} ,$$

kde súradnice vektora $\mathbf{t}$ sú smerové kosíny dotyčnice krivky v tomto bode

$$\mathbf{t} = (t_x, t_y, t_z), t_x = c(t)x'(t), t_y = c(t)y'(t), t_z = c(t)z'(t), t \in I$$

Rovnica dotyčnice krivky k v bode $P(t_0)$, $t_0 \in I$
vektorový tvar

$$\mathbf{T}(u) = \mathbf{r}(t_0) + u \mathbf{t}(t_0), u \in \mathbf{R}$$

implicitný tvar

$$\frac{X - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{Y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{Z - z(t_0)}{z'(t_0)}$$

Jednotkový vektor binormály krivky k v bode $P(t_0)$ je vektor

$$\mathbf{b}(t_0) = \frac{\mathbf{r}'(t_0) \times \mathbf{r}''(t_0)}{|\mathbf{r}'(t_0) \times \mathbf{r}''(t_0)|}$$

Vektor $\mathbf{b}$ v ľubovoľnom bode $P(t)$, $t \in I$ sa dá vyjadriť v tvare

$$\mathbf{b} = d(t) \cdot (\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''), d(t) = \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot (\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'')}} ,$$

kde súradnice vektora $\mathbf{b}$ sú smerové kosíny binormály krivky v tomto bode

$$\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$$

$$b_x = d(t) \begin{vmatrix} y'(t) & z'(t) \\ y''(t) & z''(t) \end{vmatrix}, b_y = d(t) \begin{vmatrix} x'(t) & z'(t) \\ x''(t) & z''(t) \end{vmatrix}, b_z = d(t) \begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{vmatrix}, t \in I$$

Rovnica binormály krivky k v bode $P(t_0)$, $t_0 \in I$

vektorový tvar

$$\mathbf{B}(u) = \mathbf{r}(t_0) + u \mathbf{b}(t_0), u \in \mathbf{R}$$

implicitný tvar

$$\frac{X - x(t_0)}{\begin{vmatrix} y'(t) & z'(t) \\ y''(t) & z''(t) \end{vmatrix}} = \frac{Y - y(t_0)}{\begin{vmatrix} x'(t) & z'(t) \\ x''(t) & z''(t) \end{vmatrix}} = \frac{Z - z(t_0)}{\begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{vmatrix}}$$

Jednotkový vektor (hlavnej) normály krivky k v bode $P(t_0)$ je vektor

$$\mathbf{n}(t_0) = \mathbf{b}(t_0) \times \mathbf{t}(t_0)$$

Vektor $\mathbf{n}$ v ľubovoľnom bode $P(t)$, $t \in I$ sa dá vyjadriť v tvare

$$\mathbf{n} = \frac{(c'(t)\mathbf{r}' + c(t)\mathbf{r}'')}{a(t)}, c(t) = \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}')}},$$

$$a(t) = \sqrt{(c'(t)\mathbf{r}' + c(t)\mathbf{r}'') \cdot (c'(t)\mathbf{r}' + c(t)\mathbf{r}'')},$$

pričom súradnice vektora $\mathbf{n}$ sú smerové kosíny hlavnej normály krivky v tomto bode a platí

$$n_x : n_y : n_z = [c'(t)x'(t)]' : [c'(t)y'(t)]' : [c'(t)z'(t)]', t \in I$$

Rovnica normály krivky k v bode $P(t_0)$, $t_0 \in I$

vektorový tvar

$$\mathbf{N}(u) = \mathbf{r}(t_0) + u \mathbf{n}(t_0), u \in \mathbf{R}$$

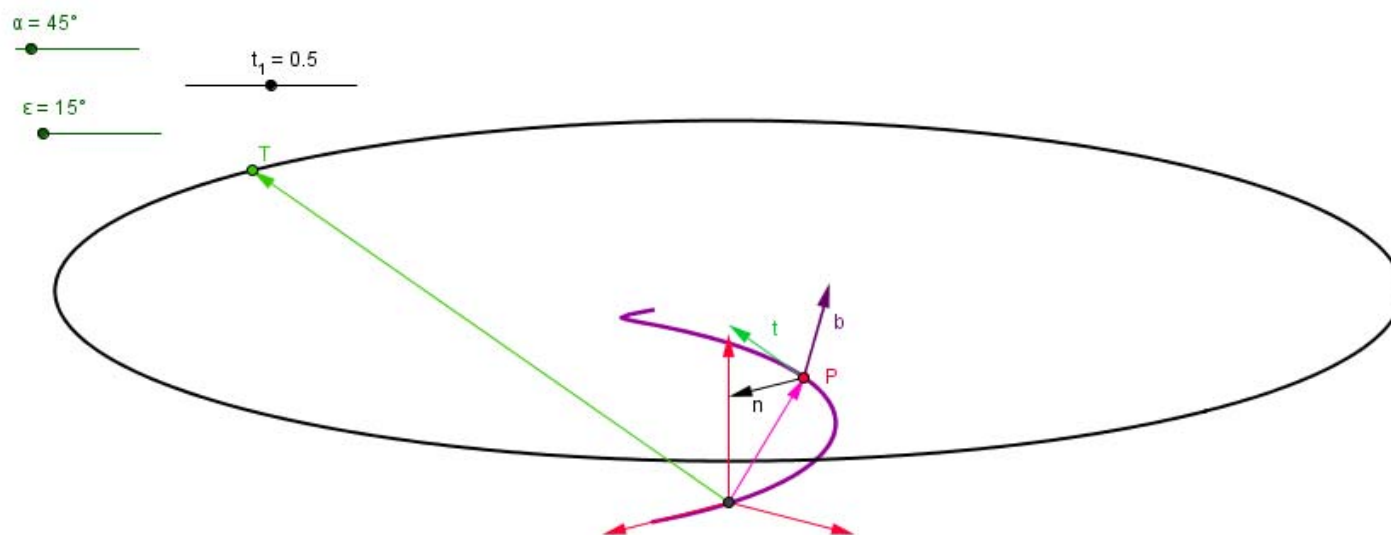
implicitný tvar

$$\frac{X - x(t_0)}{n_x} = \frac{Y - y(t_0)}{n_y} = \frac{Z - z(t_0)}{n_z}$$

Vektory $\mathbf{t}$, $\mathbf{b}$ a $\mathbf{n}$ v regulárnem bode krivky $P(t)$ sú tri na seba kolmé jednotkové vektory tvoriace ortonormálny repér krivky, vnútornú pravouhlú súradnicovú sústavu pohybujúcu sa s daným bodom po krivke.

Priamky dotyčnica, binormála a normála sú 3 na seba kolmé priamky so spoločným bodom v bode $P(t)$ tvoriace sprievodný trojhran krivky, nazývaný Frenet-Serretov trojhran.

vrchol - $P(t)$, hrany - polpriamky v dotyčnici, normále a binormále
steny - v kolmých rovinách $\omega = (P, \mathbf{t}, \mathbf{n})$, $\rho = (P, \mathbf{t}, \mathbf{b})$, $\nu = (P, \mathbf{n}, \mathbf{b})$



Oskulačná rovina krivky $\omega = (P, \mathbf{t}, \mathbf{n})$

Oskulačná rovina krivky v regulárnom bode $P(t_0)$ je kolmá na binormálu v danom bode, smerovými vektormi sú jednotkový vektor dotyčnice $\mathbf{t}$ a jednotkový vektor hlavnej normály $\mathbf{n}$.

vektorová rovnica

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}(t_0)) \cdot \mathbf{b}(t_0) = 0$$

$$[\mathbf{R} - \mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}''] = 0$$

$$\begin{vmatrix} X-x(t) & Y-y(t) & Z-z(t) \\ x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-x(t) & Y-y(t) & Z-z(t) \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = 0$$

Rovinná krivka má v každom v bode tú istú oskulačnú rovinu, leží v tejto jedinej oskulačnej rovine.

Priestorová krivka má v bode $P(t_0)$ oskulačnú rovinu, v ktorej leží v istom malom okolí daného bodu.

Rektifikačná rovina krivky $\rho = (P, \mathbf{t}, \mathbf{b})$

Rektifikačná rovina krivky v regulárnom bode $P(t_0)$ je kolmá na hlavnú normálu v danom bode.

vektorová rovnica

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}(t_0)) \cdot \mathbf{n}(t_0) = 0$$

$$[\mathbf{R} - \mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}' \times \mathbf{r}''] = 0$$

$$\begin{vmatrix} X-x(t) & Y-y(t) & Z-z(t) \\ x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ \begin{vmatrix} y'(t) & z'(t) \\ y''(t) & z''(t) \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x'(t) & z'(t) \\ x''(t) & z''(t) \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0$$

Rektifikačná rovina rovinnej krivky je kolmá na rovinu krivky.

Dĺžka priestorovej krivky k sa dá určiť ako dĺžka rovinnej krivky, ktorá je rozvinutím krivky k do rektifikačnej roviny v danom bode.

Normálová rovina krivky $\nu = (P, \mathbf{b}, \mathbf{n})$

Normálová rovina krivky v regulárnom bode $P(t_0)$ je kolmá na dotyčnicu v danom bode.

vektorová rovnica $(\mathbf{R} - \mathbf{r}(t_0)) \cdot \mathbf{t}(t_0) =$

$$[\mathbf{R} - \mathbf{r}, \mathbf{r}' \times \mathbf{r}'', \mathbf{r}' \times (\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'')] = 0$$

$$\begin{vmatrix} X-x(t) & Y-y(t) & Z-z(t) \\ \begin{vmatrix} y'(t) & z'(t) \\ y''(t) & z''(t) \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x'(t) & z'(t) \\ x''(t) & z''(t) \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{vmatrix} \\ xr(t) & yr(t) & zr(t) \end{vmatrix} = 0$$

$$xr(t) = y'(t) \begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{vmatrix} - z'(t) \begin{vmatrix} x'(t) & z'(t) \\ x''(t) & z''(t) \end{vmatrix}$$

$$yr(t) = x'(t) \begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{vmatrix} - z'(t) \begin{vmatrix} y'(t) & z'(t) \\ y''(t) & z''(t) \end{vmatrix}$$

$$zr(t) = x'(t) \begin{vmatrix} x'(t) & z'(t) \\ x''(t) & z''(t) \end{vmatrix} - y'(t) \begin{vmatrix} y'(t) & z'(t) \\ y''(t) & z''(t) \end{vmatrix}$$

Mieru odchýľky krivky od dotyčnice v danom regulárnom bode $P(t_0)$ vyjadruje prvá krivosť krivky- flexia.

Funkcia prvej krivosti

$$^1k(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}, t \in I$$

je skalárna nezáporná funkcia.

Oskulačná kružnica $h(S, \rho)$ krivky leží v oskulačnej rovine krivky v bode $P(t_0)$ a má s krivkou spoločnú dotyčnicu.

Stred oskulačnej kružnice je bod normály krivky v bode $P(t_0)$ v smere jednotkového vektora normály.

Polomer oskulačnej kružnice = polomer prvej krivosti krivky v danom bode, je prevrátená hodnota funkcie $^1k(t)$ v bode t_0 .

$$\rho = \frac{1}{^1k(t_0)}$$

Regulárny bod krivky, v ktorom $^1k(t) = 0$, je inflexný bod krivky, $\mathbf{r}''(t) = \mathbf{0}$.

Ak je ${}^1k(t) = 0$ v každom bode krivky, krivka je priamka (úsečka).

$$\mathbf{r}(t) = (at + b, ct + d, et + f), t \in \mathbf{R}$$

$$\mathbf{r}'(t) = (a, c, e), \mathbf{r}''(t) = (0, 0, 0)$$

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{a^2 + c^2 + e^2}, \mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}'(t) = \mathbf{0}, |\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}'(t)| = 0$$

$${}^1k(t) = \frac{0}{\sqrt{a^2 + c^2 + e^2}} = 0, \forall t \in I$$

Krivka konštantnej prvej krivosti je napr. kružnica.

$$\mathbf{r}(t) = (r \cos t, r \sin t, 0), r \in \mathbf{R}, t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

$$\mathbf{r}'(t) = (-r \sin t, r \cos t, 0), \mathbf{r}''(t) = (-r \cos t, -r \sin t, 0),$$

$$\mathbf{r}'''(t) = (r \sin t, -r \cos t, 0), \mathbf{r}^{(4)}(t) = (r \cos t, r \sin t, 0)$$

$$|\mathbf{r}'(t)| = r, \mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = (0, 0, r^2), |\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)| = r^2$$

$${}^1k(t) = \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{r}, \forall t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

Kružnica je sama sebe oskulačnou kružnicou v každom svojom bode.

Mieru odchýľky krivky od oskulačnej roviny v danom regulárnom bode $P(t_0)$ vyjadruje druhá krivosť krivky - torzia.

Funkcia druhej krivosti

$$^2k(t) = \frac{[\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t), \mathbf{r}'''(t)]}{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|^2}, t \in I$$

je skalárna funkcia.

Znamienko hodnoty funkcie $^2k(t)$ v bode t_0 orientáciu odchýľky krivky od oskulačnej roviny v bode krivky $P(t_0)$.

$^2k(t_0) > 0$, krivka sa vychyluje v smere jednotkového vektora binormály,
nad oskulačnú rovinu v danom bode

$^2k(t_0) < 0$, krivka sa vychyluje proti smeru jednotkového vektora binormály,
pod oskulačnú rovinu v danom bode

$^2k(t_0) = 0$, bod krivky sa nazýva planárny, krivka sa nevychyluje
z oskulačnej roviny v danom bode, v okolí bodu v nej leží

Ak je $^2k(t) = 0$ v každom bode krivky, krivka je rovinnou krivkou.

Pre kružnicu platí

$${}^2k(t) = \frac{\begin{vmatrix} -r \sin t & r \cos t & 0 \\ -r \cos t & -r \sin t & 0 \\ r \sin t & -r \cos t & 0 \end{vmatrix}}{r^4} = 0$$

Krivka konštantnej druhej krivosti je napr. skrutkovica.

$$\mathbf{r}(t) = (r \cos t, r \sin t, vt), r, v \in \mathbf{R}, t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

$$\mathbf{r}'(t) = (-r \sin t, r \cos t, v), \mathbf{r}''(t) = (-r \cos t, -r \sin t, 0), \mathbf{r}'''(t) = (r \sin t, -r \cos t, 0)$$

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{r^2 + v^2}, \mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = (rv \sin t, rv \cos t, r^2), |\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)| = r\sqrt{r^2 + v^2}$$

$$[\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t), \mathbf{r}'''(t)] = vr^2$$

$${}^1k(t) = \frac{r\sqrt{r^2 + v^2}}{(r^2 + v^2)\sqrt{r^2 + v^2}} = \frac{r}{r^2 + v^2}, \forall t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

$${}^2k(t) = \frac{vr^2}{r^2(r^2 + v^2)} = \frac{v}{r^2 + v^2} > 0, \forall t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

Dve krivky $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{p}(t)$, $t \in I$ nazývame rovnobežné (ekvidištantné), keď existuje číslo $c \in \mathbf{R}$ také, že $\forall t \in I$ platí

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{r}(t) + c \cdot \mathbf{n}(t)$$

Každé 2 sústredné kružnice sú ekvidištantná, resp. 2 elipsy so spoločným stredom, pre ktorých polosi platí $a_2 = c \cdot a_1$, $b_2 = c \cdot b_1$, pre malé hodnoty c .

Krivky konštantného spádu

Nech ω je pevný uhol, určujúci daný smer - gradient $(\cos \omega, \sin \omega)$

Priestorová krivka, ktorej funkcie prvej a druhej krivosti spĺňajú rovnicu

$${}^2k \sin \omega - {}^1k \cos \omega = 0$$

sa nazýva krivka konštantného spádu, pričom spádom nazývame tangens uhla ω , platí

$$\tan \omega = \frac{{}^1k}{{}^2k} = \text{const}$$

Cylindrická skrutkovica je krivka konštantného spádu, $\tan \omega = r/v$.

Frenet-Serretove vzorce

vyjadrujú vzťah medzi jednotkovými vektormi dotyčnice, binormály a normály krivky v ľubovoľnom regulárnom bode a ich deriváciami

$$\mathbf{t}' = {}^1k|\mathbf{r}'|\mathbf{n}$$

$$\mathbf{n}' = -{}^1k|\mathbf{r}'|\mathbf{t} + {}^2k|\mathbf{r}'|\mathbf{b}$$

$$\mathbf{b}' = -{}^2k|\mathbf{r}'|\mathbf{n}$$

$${}^1k = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3}, {}^2k = \frac{[\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''']}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|^2}$$