

Plošné integrály

Nech je daná regulárna plocha S parametrizáciou

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}, (u, v) \in G \subset \mathbf{R}^2$$

a skalárna funkcia $f(X)$, ktorá je definovaná a spojitá na S .

Plošný integrál prvého druhu je integrál z funkcie f

$$\iint_S f(X) dS = \iint_S f(\mathbf{r}(u, v)) |\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)| du dv$$

Integrál nezávisí od zvolenej parametrizácie plochy S

Súradnicový tvar vzorca

$$\begin{aligned} \iint_S f(x, y, z) dS &= \\ &= \iint_G f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x'_u & z'_u \\ x'_v & z'_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}^2} dudv \end{aligned}$$

Ak je plocha S grafom funkcie $z = z(x, y)$, $[x, y] \in G \subset \mathbf{R}^2$, integrál má tvar

$$\begin{aligned} \iint_S f(x, y, z) dS &= \\ &= \iint_G f(x, y, z(x, y)) \cdot \sqrt{1 + [z'_x(x, y)]^2 + [z'_y(x, y)]^2} dx dy \end{aligned}$$

Fyzikálny význam - hmotnosť plochy S s funkciou hustoty $f(X)$

Geometrická interpretácia

Obsah plochy S

$$\iint_S dS$$

Nech je daná regulárna orientovaná plocha S parametrizáciou

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}, (u, v) \in G \subset \mathbf{R}^2$$

a vektorová funkcia $\mathbf{F}(X)$ definovaná a spojitá na S

$$\mathbf{F}(X) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

Plošný integrál druhého druhu je integrál z funkcie $\mathbf{F}$

$$\iint_S \mathbf{F}(X) d\mathbf{S} = \pm \iint_S \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) |\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)| du dv$$

Integrál nezávisí od zvolenej parametrizácie plochy S , iba od jej orientácie.

Súradnicový tvar vzorca

$$\iint_S \mathbf{F}(x, y, z) d\mathbf{S} = \pm \iint_S \begin{vmatrix} P(\mathbf{r}(u, v)) & Q(\mathbf{r}(u, v)) & R(\mathbf{r}(u, v)) \\ x'_u(u, v) & y'_u(u, v) & z'_u(u, v) \\ x'_v(u, v) & y'_v(u, v) & z'_v(u, v) \end{vmatrix} du dv$$

Ak je plocha S grafom funkcie $z = z(x, y)$, $[x, y] \in G \subset \mathbf{R}^2$, integrál má tvar

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F}(x, y, z) d\mathbf{S} &= \\ &= \pm \iint_S \left[-P(x, y, z(x, y)) \cdot z'_x(x, y) - Q(x, y, z(x, y)) \cdot z'_y(x, y) + R(x, y, z(x, y)) \right] dx dy \end{aligned}$$

Gaussova – Ostrogradského veta

Nech V je trojrozmerná ohraničená oblasť, ktorej hranicou je jednoduchá uzavretá plocha S orientovaná vonkajším normálovým vektorom. Nech je vektorová funkcia F definovaná spojitá na oblasti V a má na nej spojité parciálne derivácie prvého rádu. Potom platí

$$\iint_S F(x, y, z) dS = \iiint_V \operatorname{div} F dx dy dz$$

Dôsledok

Ak je V oblasť spĺňajúca predpoklady Gaussovej vety, potom pre výpočet objemu oblasti V platí

$$\mu(V) = \frac{1}{3} \iint_S (x, y, z) dS$$

Stokesova veta

Nech S je hladká orientovaná plocha, ktorej okrajom je uzavretá hladká krivka K a nech vektorová funkcia $\mathbf{F}$ a jej parciálne derivácie sú spojité na istej otvorenej množine obsahujúcej plochu S . Potom pri súhlasnej orientácii plochy S a krivky K platí

$$\oint_K \mathbf{F}(x, y, z) d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F}(x, y, z) d\mathbf{S}$$

Ak pre orientovanú plochu S a jednoduchú krivku K ležiacu na ploche S platí, že zo smeru jednotkového normálového vektora sa obiehanie po krivke K javí proti smeru pohybu hodinových ručičiek, hovoríme, že krivka K je orientovaná súhlasne s plochou S .