

Krivkové integrály

Nech $f(X)$ je skalárna funkcia, ktorá je nezáporná a spojitá na oblasti $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ a nech je daná regulárna rovinná krivka K parametrizáciou

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, t \in \langle \alpha, \beta \rangle \subset \mathbf{R}$$

Krivkový integrál prvého druhu je integrál z funkcie f

$$\int_K f(X) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

Integrál nezávisí od zvolenej parametrizácie krivky K

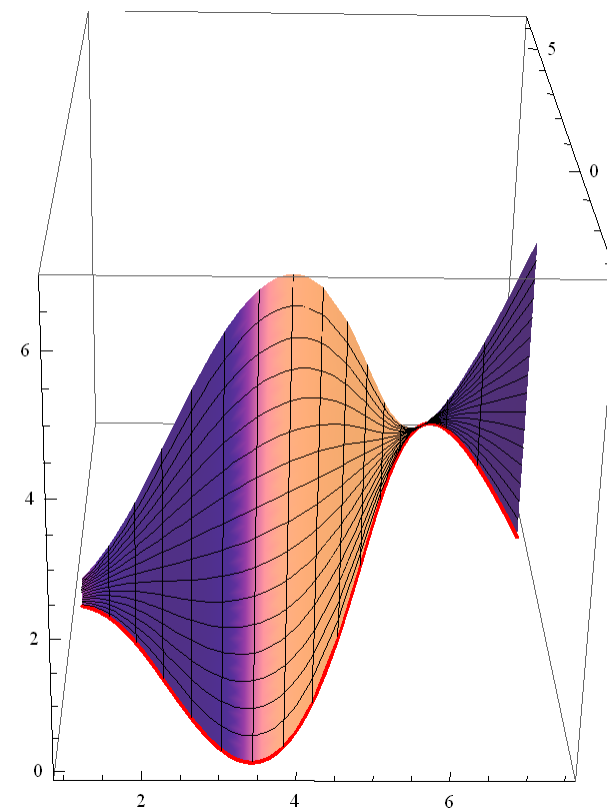
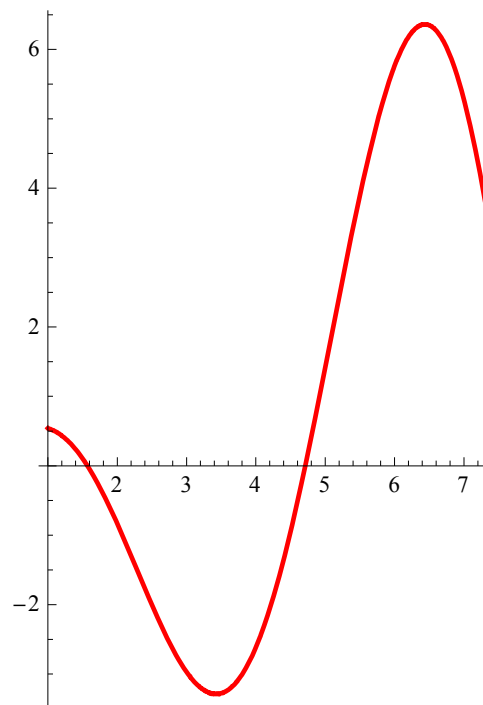
Vektorový tvar vzorca

$$\int_K f(X) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(\mathbf{r}(t)) \cdot |\mathbf{r}'(t)| dt$$

Fyzikálny význam - hmotnosť rovinnej krivky K s funkciou hustoty $f(X)$

Geometrická interpretácia

Obsah časti priamkovej plochy (valcovej plochy) s tvoriacimi priamkami v smere osi z a riadiacou čiarou v krivke K , ktorá je zhora ohraničená hodnotami funkcie $f(x, y)$ v bodoch krivky K .



Dĺžka krivky K

$$l = \int_K ds = \int_{\alpha}^{\beta} |\mathbf{r}'(t)| dt$$

Nech $f(X)$ je skalárna funkcia, ktorá je nezáporná a spojitá na oblasti $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ a nech je daná regulárna krivka K parametrizáciou

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, t \in \langle \alpha, \beta \rangle \subset \mathbf{R}$$

Krivkový integrál prvého druhu je integrál z funkcie f

$$\int_K f(X) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$$

Integrál nezávisí od zvolenej parametrizácie krivky K

Vektorový tvar vzorca

$$\int_K f(X) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(\mathbf{r}(t)) \cdot |\mathbf{r}'(t)| dt$$

Fyzikálny význam - hmotnosť priestorovej krivky K s funkciou hustoty $f(X)$

Nech je daná vektorová funkcia $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y) \mathbf{i} + Q(x, y) \mathbf{j}$ diferencovateľná na oblasti $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ a nech je daná regulárna orientovaná krivka K parametrizáciou

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, t \in \langle \alpha, \beta \rangle \subset \mathbf{R}$$

Krivkový integrál druhého druhu je integrál z funkcie $\mathbf{F}$

$$\int_K P dx + Q dy = \int_{\alpha}^{\beta} \left[P \frac{dx}{dt} + Q \frac{dy}{dt} \right] dt$$

Vektorový tvar vzorca

$$\begin{aligned} \int_K \mathbf{F} ds &= \pm \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot |\mathbf{r}'(t)| dt = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t)) \cdot y'(t)] dt \end{aligned}$$

Nech je daná vektorová funkcia

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z) \mathbf{i} + Q(x, y, z) \mathbf{j} + R(x, y, z) \mathbf{j}$$

diferencovateľná na oblasti $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ a nech je daná regulárna orientovaná krivka K parametrizáciou $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle \subset \mathbf{R}$

Krivkový integrál druhého druhu z funkcie $\mathbf{F}$

$$\int_K P dx + Q dy + R dz = \int_{\alpha}^{\beta} \left[P \frac{dx}{dt} + Q \frac{dy}{dt} + R \frac{dz}{dt} \right] dt$$

Vektorový a súradnicový tvar vzorca

$$\begin{aligned} \int_K \mathbf{F} ds &= \pm \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot |\mathbf{r}'(t)| dt = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) \cdot y'(t) + R(x(t), y(t), z(t)) \cdot z'(t)] dt \end{aligned}$$

Nech $(\Omega, \mathbf{F})$ je vektorové pole.

Hovoríme, že krivkový integrál funkcie $\mathbf{F}$ nezávisí od integračnej cesty v oblasti Ω , ak pre každé dve orientované,

po častiach hladké krivky K_1, K_2 ,

ktoré ležia v oblasti Ω a majú totožné začiatkové a koncové body, platí

$$\int_{K_1} \mathbf{F} \, ds = \int_{K_2} \mathbf{F} \, ds$$

Krivkový integrál funkcie $\mathbf{F}$ nezávisí od integračnej cesty v oblasti Ω práve vtedy, keď krivkový integrál funkcie $\mathbf{F}$ po ľubovoľnej uzavretej, po častiach hladkej krivke sa rovná nule.

Krivkový integrál nezávisí od integračnej cesty práve vtedy, keď je vektorové pole $(\Omega, \mathbf{F})$ potenciálové.

Ak je U potenciál poľa

$$\mathbf{F} = \text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k}$$

potom pre ľubovoľnú po častiach hladkú krivku K v Ω so začiatočným bodom A a koncovým bodom B platí

$$\int_K \mathbf{F} \, ds = U(B) - U(A)$$

Nech $\mathbf{F}$ má na Ω spojité parciálne derivácie prvého rádu.

Nutnou podmienkou na to, aby bolo pole $(\Omega, \mathbf{F})$ potenciálové je, aby v každom bode oblasti Ω platilo $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Ak je oblasť Ω jednoducho súvislá (jej hranicou je jednoduchá uzavretá a po častiach hladká krivka), je táto podmienka aj postačujúca.

Greenova veta

Nech G je jednoducho súvislá oblasť, ktorej hranicou je jednoduchá uzavretá a po častiach hladká krivka K . Nech vektorová funkcia

$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y) \mathbf{i} + Q(x, y) \mathbf{j}$$

má na G spojité parciálne derivácie podľa x a podľa y . Potom platí

$$\oint_K \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Dôsledok

Nech G je rovinná oblasť, ktorá je ohraničená kladne orientovanou, uzavretou, jednoduchou, po častiach hladkou krivkou K .

Potom pre obsah platí

$$P = \frac{1}{2} \oint_K x dy - y dx$$