

ÚLOHY NA PLOŠNÉ INTEGRÁLY

Príklad 1: Vypočítajte nasledujúce plošné integrály prvého druhu:

- $\iint_S dS$, S je plocha $x = u \cos v, y = u \sin v, z = 4v, 0 \leq u \leq 3, 0 \leq v \leq \pi$
- $\iint_S z dS$, S je časť helikoidu $\mathbf{r} = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + v \mathbf{k}, (u, v) \in \langle 0, a \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle$
- $\iint_S z^2 dS$, S je časť kužeľovej plochy
 $\mathbf{r} = u \cos v \sin \alpha \mathbf{i} + u \sin v \sin \alpha \mathbf{j} + u \cos \alpha \mathbf{k}, (u, v) \in \langle 0, a \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle, \alpha \in (0, \pi/2)$
- $\iint_S xyz dS$, S je časť roviny $x + y + z = 1$, ležiaca v prvom oktante
- $\iint_S (x^2 + y^2) dS$, S je časť kužeľovej plochy $x^2 + y^2 = z^2, 2 \leq z \leq 3$
- $\iint_S |xyz| dS$, S je časť parabolickej plochy $z = x^2 + y^2, z \leq 1$
- $\iint_S \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} dS$, S je časť parabolickej plochy $z = x^2 + y^2$ ohraničená rovinou $z = a$
- $\iint_S \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dS$, S je časť hyperbolického paraboloidu $z = xy$ $z = x^2 + y^2$ ohraničená valcovou plochou $x^2 + y^2 = R^2, |z| \leq R$
- $\iint_S (x^2 + y^2) dS$, S je guľová plocha $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$
- $\iint_S (x^2 + y^2)z dS$, S je horná polovica guľovej plochy so stredom v začiatku a polomerom R
- $\iint_S x^2 y^2 dS$, S je časť guľovej plochy $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0$

Riešenie: a) $r'_u \times r'_v = (4 \sin v, -4 \cos v, u), I = \int_0^3 \left(\int_0^\pi \sqrt{16 + u^2} dv \right) du = \frac{\pi}{2} (15 + 16 \ln 2)$

b) $I = \pi^2 (a\sqrt{a^2 + 1} + \ln(a + \sqrt{a^2 + 1}))$

c) $I = \frac{\pi a^4}{2} \sin \alpha \cos^2 \alpha$

d) $x = u, y = v, z = 1 - u - v, 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1 - u, I = \int_0^1 \left(\int_0^{1-u} uv(1 - u - v) \sqrt{3} dv \right) du = \frac{\sqrt{3}}{120}$

e) $x = u \cos v, y = u \sin v, z = u, 2 \leq u \leq 3, 0 \leq v \leq 2\pi, I = \int_0^{2\pi} \left(\int_2^3 u^2 u \sqrt{2} du \right) dv = \frac{65\sqrt{2}\pi}{2}$

f) $I = \frac{125\sqrt{5} - 1}{420}$

$$x = u \cos v, y = u \sin v, z = u^2, 0 \leq u \leq \sqrt{a}, 0 \leq v \leq 2\pi, \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = (-2u^2 \cos v, -2u^2 \sin v, u)$$

$$g) |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| = u\sqrt{4u^2 + 1}, I = \int_0^{\sqrt{a}} \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 4u^2} dv \right) du = \pi \left[\sqrt{a} \sqrt{1 + 4a} + \frac{1}{2} \ln(2\sqrt{a} + \sqrt{1 + 4a}) \right]$$

$$h) I = \pi \left[R\sqrt{R^2 + 1} + \ln(R + \sqrt{R^2 + 1}) \right]$$

$$x = a \cos u \cos v, y = a \sin u \cos v, z = a \sin v, 0 \leq u \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2},$$

$$i) \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = (a^2 \cos u \cos^2 v, a^2 \sin u \cos^2 v, a^2 \sin v \cos v), |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| = a^2 \cos v,$$

$$I = \int_0^{2\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2 v a^2 \cos v dv \right) du = \frac{8}{3} \pi a^4$$

$$x = R \cos u \cos v, y = R \sin u \cos v, z = R \sin v, 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2},$$

$$j) \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = (R^2 \cos u \cos^2 v, R^2 \sin u \cos^2 v, R^2 \sin v \cos v), |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| = R^2 \cos v,$$

$$I = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cos^2 v R \sin v R^2 \cos v dv \right) du = \frac{\pi}{2} R^5$$

$$x = R \cos u \cos v, y = R \sin u \cos v, z = R \sin v, 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2},$$

$$k) I = R^6 \int_0^{2\pi} \cos^2 u \sin^2 u du \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 v \cos v dv = \frac{2\pi}{15} R^6$$

Príklad 2: Vypočítajte nasledujúce plošné integrály druhého druhu:

- $\iint_S xdydz + ydxdz + zdx dy$, S je časť plochy $\mathbf{r} = u \mathbf{i} + v \mathbf{j} + (uv + 1)\mathbf{k}$, $(u, v) \in (0, 1)^2$
orientovanej tak, že normálový vektor zvierá s vektorom $\mathbf{k}$ ostrý uhol
- $\iint_S ydydz + xdx dz + zdx dy$, S je časť plochy $\mathbf{r} = u \mathbf{i} + v \mathbf{j} + (uv + 1)\mathbf{k}$, $(u, v) \in (0, 1)^2$
orientovanej tak, že normálový vektor zvierá s vektorom $\mathbf{k}$ ostrý uhol
- $\iint_S xdydz + ydxdz + zdx dy$, S je časť paraboloidu $\mathbf{r} = u \mathbf{i} + v \mathbf{j} + (u^2 + v^2)\mathbf{k}$, $(u^2 + v^2) \leq 1$
orientovanej tak, že normálový vektor zvierá s vektorom $\mathbf{k}$ tupý uhol
- $\iint_S zdx dy + xdx dz + ydy dz$, S je časť plochy $x - y + z - 1 = 0$, $x \geq 0$, $y \leq 0$, $z \geq 0$ orientovanej tak,
že normálový vektor zvierá s vektorom $\mathbf{k}$ ostrý uhol
- $\iint_S ydydz + zdx dz + xdx dy$, S je časť roviny $x + y + z = a$, ležiaca v prvom oktante a
orientovaná tak, že normálový vektor zvierá s vektorom $\mathbf{k}$ ostrý uhol
- $\iint_S xzdy dx + xydy dz + yzdx dz$, S je povrch ihlana ohraničeného rovinami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$, orientovaný normálou von

- g) $\iint_S xzdydx + xydydz + yzdx dz$, S je povrch kocky $\langle 0, 1 \rangle^3$, orientovaný normálou von
- h) $\iint_S xzdydz + ydx dz + zdx dy$, S je povrch valca, ktorého podstava leží v rovine $z = 0$, stred je v začiatku súradnicovej sústavy, polomer je R a výška H , orientovaný normálou von
- i) $\iint_S x^2 dydz + z^2 dx dy$, S je časť kužeľovej plochy $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \leq z \leq 1$, orientovanej tak, že normálový vektor zvierá tupý uhol s vektorom $\mathbf{k}$
- j) $\iint_S xdydz + ydx dz + zdx dy$, S je guľová plocha $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, orientovaná normálou von
- k) $\iint_S \frac{dydz}{x} + \frac{dx dz}{y} + \frac{dx dy}{z}$, S je elipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, orientovaný normálou von

Riešenie: a) $I = \int_0^1 \left(\int_0^1 (1 - uv) du \right) dv = \frac{3}{4}$

b) $I = \int_0^1 \left(\int_0^1 (-u^2 - v^2 + uv + 1) du \right) dv = \frac{7}{12}$

c) $I = \iint_G (u^2 + v^2) du dv = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \rho^2 \cdot \rho d\varphi \right) d\rho = \frac{\pi}{2}$

$x = u, y = v, z = 1 - u + v, 0 \leq u \leq 1, u - 1 \leq v \leq 0, \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = (1, -1, 1)$

d) $I = \int_0^1 \left(\int_{u-1}^0 (1 - 2u - 2v) dv \right) du = -\frac{1}{6}$

e) $x = u, y = v, z = a - u - v, 0 \leq u \leq a, 0 \leq v \leq a - u, I = \frac{a^3}{2}$

f) $I = \frac{1}{8}$

$S_1 : x = u, y = v, z = 0, 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1, I_1 = -\int_0^1 \int_0^1 0 dx dy = 0$

$S_2 : x = u, y = v, z = 1, 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1, I_2 = \int_0^1 \int_0^1 1 dx dy = 1,$

$S_3 : x = u, y = 0, z = v, 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1, I_3 = \int_0^1 \int_0^1 0 dx dz = 0,$

g) $S_4 : x = u, y = 1, z = v, 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1, I_4 = \int_0^1 \int_0^1 1 dx dz = 1,$

$S_5 : x = 0, y = u, z = v, 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1, I_5 = \int_0^1 \int_0^1 0 dy dz = 0,$

$S_6 : x = 1, y = u, z = v, 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1, I_6 = \int_0^1 \int_0^1 1 dy dz = 1,$

$I = 3$

$$S_1 : x = R \cos u, y = R \sin u, z = v, 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq H, I_1 = 2\pi HR^2$$

h) $S_2 : x = u \cos v, y = u \sin v, z = 0, 0 \leq u \leq R, 0 \leq v \leq 2\pi, I_2 = 0,$

$$S_3 : x = u \cos v, y = u \sin v, z = H, 0 \leq u \leq R, 0 \leq v \leq 2\pi, I_3 = \pi HR^2,$$

$$I = 3\pi HR^2$$

$$x = u \cos v, y = u \sin v, z = u, 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi, \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = (-u \cos v, -u \sin v, u)$$

i)
$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (u^3 \cos^3 v - u^3) dv \right) du = -\frac{\pi}{2}$$

$$x = a \cos u \cos v, y = a \sin u \cos v, z = a \sin v, 0 \leq u \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2},$$

j)
$$I = a^3 \int_0^{2\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos v dv \right) du = 4\pi a^3$$

$$x = a \cos u \cos v, y = b \sin u \cos v, z = c \sin v, 0 \leq u \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2},$$

k)
$$\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = (bc \cos u \cos^2 v, ac \sin u \cos^2 v, ab \sin v \cos v)$$

$$I = \int_0^{2\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \right) \cos v dv \right) du = 4\pi \left(\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \right)$$

Príklad 3: Pomocou Gaussovej-Ostrogradského vety vypočítajte nasledujúce plošné integrály:

- a) $\iint_S x^2 dydz + y^2 dx dz + z^2 dx dy$, S je povrch kocky $\langle 0, 1 \rangle^3$, orientovanej normálou von
- b) $\iint_S xz dx dy + xy dy dz + yz dx dz$, S je povrch ihlana ohraničeného rovinami $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$, orientovaného normálou von
- c) $\iint_S x^3 dydz + y^3 dx dz + z^3 dx dy$, S je guľová plocha $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, orientovaná normálou von
- d) objem elipsoidu so stredom v začiatku súradnicovej sústavy a polosami a, b, c v súradnicových osiach x, y, z

Riešenie: a)
$$I = 2 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x + y + z) dx dy dz = 3$$

b)
$$I = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (x + y + z) dz dy dx = \frac{1}{8}$$

c)
$$I = \frac{12}{5} \pi a^5$$

$$x = a \cos u \cos v, y = b \sin u \cos v, z = c \sin v, 0 \leq u \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2},$$

d)
$$P = \frac{2\pi abc}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos v dv = \frac{4\pi}{3} abc$$

Príklad 4: Pomocou Stokesovej vety vypočítajte nasledujúce integrály:

- a) $\iint_K (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$, K je elipsa $x = a\sin^2 t$, $y = 2a\sin t \cos t$, $z = a\cos^2 t$,
 $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, orientovaná súhlasne s daným parametrickým vyjadrením
- b) $\iint_K xzdx dy + xydy dz + yzdx dz$, K je priesečnica valcovej plochy $x^2+y^2=2y$ a roviny $y=z$
- c) $\iint_K (y^2+z^2)dx + (x^2+z^2)dy + (x^2+y^2)dz$, K je priesečnica plôch $x^2+y^2+z^2=2bx$,
 $x^2+y^2=2ax$, $z \geq 0$, $0 < a < b$, orientovaná súhlasne s menšou časťou guľovej plochy S :
 $x^2+y^2+z^2=2bx$, ktorej je okrajom, pričom plocha S je orientovaná normálou von
- d) $\iint_K (x^2-yz)dx + (x^2-xz)dy + (z^2-xy)dz$, K je oblúk AB skrutkovice s parametrickým
vyjadrením $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = ht/2\pi$, $A = [a, 0, 0]$, $B = [a, 0, h]$, pričom krivku K
uzavrieme úsečkou BA

Riešenie: a) $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$, $I = 0$

b) $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$, $I = 0$

$$x = u, y = v, z = \sqrt{2bu - u^2 - v^2}, 0 \leq u \leq 2a, -\sqrt{2au - u^2} \leq v \leq \sqrt{2au - u^2},$$

c) $\text{rot } \mathbf{F} = (2(y-z), 2(z-x), 2(x-y))$, $I = 2b \iint_S \left(\frac{v}{\sqrt{2bu - u^2 - v^2}} + 1 \right) dv du = 2\pi a^2 b$

a) $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$, $I = \int_0^1 h^3 t^2 dt = \frac{h^3}{3}$