

ÚLOHY NA KRIVKOVÉ INTEGRÁLY

Príklad 1: Vypočítajte nasledujúce krivkové integrály prvého druhu:

- $\int_K \sqrt{2y} ds$, kde K je časť cykloidy $\mathbf{r}(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$
- $\int_K (x^2 + y^2) ds$, kde K je krivka $\mathbf{r}(t) = a(\cos t + t \sin t, \sin t - t \cos t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$
- $\int_K \frac{z^2}{x^2 + y^2} ds$, kde K je oblúk skrutkovice $\mathbf{r}(t) = a(\cos t, \sin t, t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$
- $\int_K \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} ds$, kde K je úsečka $x - 2y - 4 = 0$, $0 \leq x \leq 4$
- $\int_K \frac{1}{x - y} ds$, kde K je úsečka AB , $A = [0, -2]$, $B = [4, 0]$
- $\int_K y ds$, kde K je časť paraboly $y = 2\sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 1$
- $\int_K x^2 ds$, kde K je krivka $y = \ln x$, $1 \leq x \leq 2$
- $\int_K x ds$, kde K je časť paraboly $y = x^2$, $1 \leq x \leq 2$
- $\int_K x^2 y ds$, kde K je časť kružnice $x^2 + y^2 = a^2$ ležiaca v prvom kvadrante
- $\int_K xy ds$, kde K je časť elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ležiaca v prvom kvadrante

Riešenie: a) $I = 2a\sqrt{a} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) dt = 4\pi a\sqrt{a}$

b) $I = 2\pi^2 a^3 (1 + 2\pi^2)$

c) $I = a\sqrt{2} \int_0^{2\pi} t^2 dt = \frac{8\sqrt{2}a\pi^3}{3}$

d) $I = \int_{-\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} dt = \ln \frac{3\sqrt{5} + 7}{2}$

e) $x = 4t, y = -2 + 2t, 0 \leq t \leq 1, I = \sqrt{5} \ln 2$

f) $x = t, y = 2\sqrt{t}, 0 \leq t \leq 1, I = 2 \int_0^1 \sqrt{t+1} dt = \frac{4}{3} (2\sqrt{2} - 1)$

g) $x = t, y = \ln t, 1 \leq t \leq 2, I = \frac{1}{3} (5\sqrt{5} - 2\sqrt{2})$

h) $x = t, y = t^2, 1 \leq t \leq 2, I = \frac{1}{12} (17\sqrt{17} - 5\sqrt{5})$

i) $x = a \cos t, y = a \sin t, t \in \langle 0, 2\pi \rangle, I = \frac{a^4}{3}$

$x = a \cos t, y = b \sin t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2},$

j) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ab \sin t \cos t \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = \frac{ab(a^2 + ab + b^2)}{3(a + b)}$

Príklad 2: Vypočítajte nasledujúce krivkové integrály druhého druhu:

- a) $\int_K y^2 dx$, K je uzavretá krivka, horná polovica elipsy $\mathbf{r}(t) = (a \cos t, b \sin t)$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$
a úsečka $y = 0$, $x \in \langle -a, a \rangle$
- b) $\int_K \frac{x}{y} dx + \frac{y}{y-a} dy$, K je časť cykloidy $\mathbf{r}(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$, $t \in \langle \pi/6, \pi/3 \rangle$
- c) $\int_K \frac{x^2 dy - y^2 dx}{x^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{5}{3}}}$, K je časť asteroidy $\mathbf{r}(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t)$, $t \in \langle 0, \pi/2 \rangle$
- d) $\int_K x dx + y dy + (xz - y) dz$, K je krivka $\mathbf{r}(t) = (t^2, 2t, 4t^3)$, od $A = [0, 0, 0]$ do $B = [1, 2, 4]$
- e) $\int_K yz dx + xz dy + xy dz$, K je oblúk skrutkovice $\mathbf{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt/2\pi)$, $0 \leq t \leq 2\pi$
- f) $\int_K 4x \sin^2 y dx + y \cos^2 2x dy$, K je úsečka AB , $A = [0, 0]$, $B = [3, 6]$
- g) $\int_K x dy - y dx$, K je krivka $y = x^3$, $0 \leq x \leq 2$
- h) $\int_K xy dx$, K je časť sínusoidy $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$
- i) $\int_K (x - y) dx + (x + y) dy$, K je časť paraboly $x = y^2$, $1 \leq x \leq 2$
- j) $\int_K \frac{(x + y) dx - (x - y) dy}{x^2 + y^2}$, K je kružnica $x^2 + y^2 = a^2$ orientovaná kladne
- k) $\int_K y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$, K je časť Vivianiho krivky $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = ax$, $z \geq 0$,
body $A = [a, 0, 0]$, $B = \left[\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right]$, $C = [0, 0, a]$ určujú orientáciu krivky

Riešenie: a) $I_1 = -\frac{4}{3}ab^2$, $K_2 : x = -a + 2at, y = 0, 0 \leq t \leq 1, I_2 = 0 \Rightarrow I = -\frac{4}{3}ab^2$

b) $I = a \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (t - gt) dt = a \left(\frac{\pi^2}{24} + \ln \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$

c) $I = \frac{3}{8} a^{\frac{4}{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (t - \cos 4t) dt = \frac{3\pi}{16} a^{\frac{4}{3}}$

d) $I = \frac{5}{2}$

e) $I = 0$

f) $K : x = 3t, y = 6t, 0 \leq t \leq 1, I = 18$

g) $I = 8$

h) $I = \pi$

i) $K : x = t^2, y = t, 0 \leq t \leq 2, I = \frac{22}{3}$

j) $K : x = a \cos t, y = a \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi, I = -2\pi$

k) $K : x = \frac{a}{2}(1 + \cos t), y = \frac{a}{2} \sin t, z = a \sin \frac{t}{2}, 0 \leq t \leq 2\pi, I = -\frac{\pi a^3}{4}$

Príklad 3: Zistite, či je daný integrál závislý od integračnej cesty:

- a) $\int_K (2x + 3y) dx + (3x - 4y) dy$
- b) $\int_K (x^4 + 4xy^3) dx + (6x^2y^2 - 5y^4) dy$
- c) $\int_K (x^2 - 2yz) dx + (y^2 - 2xz) dy + (x^2 - 2xy) dz$
- d) $\int_K \left(3x^2 + \frac{y}{(x+z)^2} \right) dx + \frac{dy}{x+z} + \frac{y}{(x+z)^2} dz$
- e) $\int_K \left(\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4} \right) dx - \frac{2y}{x^3} dy$

Riešenie: a) Nie je.

b) Nie je.

c) Nie je.

d) Nie je.

e) Nie je, ak krivka K nepretína os z .

Príklad 4: Pomocou Greenovej vety vypočítajte nasledujúce integrály:

- a) $\int_K y^2 dx + x dy$, K je hranica štvorca ohraničeného priamkami $x=1$, $x=-1$, $y=1$, $y=-1$
- b) $\int_K y^2 dx + x dy$, K je kladne orientovaná kružnica s polomerom 2 a stredom $O = [0,0]$
- c) $\int_K (x + y) dx - (x - y) dy$, K je kladne orientovaná elipsa $\mathbf{r}(t) = (a \cos t, b \sin t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$

Riešenie: a) 4 b) 4π c) $-2\pi ab$

Príklad 5: Pomocou krivkového integrálu nájdite obsah vnútra

- a) elipsy $\mathbf{r}(t) = a \cos t \mathbf{i} + b \sin t \mathbf{j}$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$
- b) oblúka cykloidy $\mathbf{r}(t) = a(t - \sin t) \mathbf{i} + a(1 - \cos t) \mathbf{j}$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ ohraničeného osou x
- c) asteroidy $\mathbf{r}(t) = a \cos^3 t \mathbf{i} + a \sin^3 t \mathbf{j}$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$
- d) slučky Descartovho listu $x = \frac{3at}{1+t^3}$, $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$, $t \in \langle 0, \infty \rangle$

Riešenie: a) $P = 4\pi ab$

b) $P = 3\pi a^2$

c) $P = 3\pi a^2/8 \dots$

d) $P = 3a^2/2$