

ÚLOHY O POLIACH

Príklad 1: Nájdite obor definície Ω funkcie f , vyjadrite gradient funkcie f a jej deriváciu v danom smere $\mathbf{s}$ a určte ich hodnoty v bode X_0

- a) $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2, \mathbf{s} = (0, 1), X_0 = [1, 1]$
- b) $f(x, y) = \frac{x+y}{1-xy}, \mathbf{s} = (-1, 1), X_0 = [1, -1]$
- c) $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}, \mathbf{s} = (3, 4), X_0 = [-1, -1]$
- d) $f(x, y, z) = 2x^3y^2z^4, \mathbf{s} = (1, 1, 1), X_0 = [1, 1, 1]$
- e) $f(x, y, z) = \sin(x + y^2 + z^3), \mathbf{s} = (0, 0, -1), X_0 = [\pi, 0, 0]$
- f) $f(x, y, z) = e^xy + \ln z, \mathbf{s} = (1, 1, -1), X_0 = [0, 1, 1]$

Riešenie: a) $\Omega = \mathbf{R}^2, F(X) = \text{grad } f = (4x, 6y), F(X_0) = (4, 6), f'_s(X) = 6y, f'_s(X_0) = 6$

$$\text{b) } \Omega = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, xy \neq 1\}, F(X) = \text{grad } f = \left(\frac{1+y^2}{(1-xy)^2}, \frac{1+x^2}{(1-xy)^2} \right), F(X_0) = (1/2, 1/2),$$

$$f'_s(X) = \left(-\frac{y^2+1}{\sqrt{2}(1-xy)^2}, \frac{x^2+1}{\sqrt{2}(1-xy)^2} \right), f'_s(X_0) = \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)$$

$$\text{c) } \Omega = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, x, y \neq 0\}, F(X) = \text{grad } f = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right), F(X_0) = (-1/2, -1/2),$$

$$f'_s(X) = \left(-\frac{3x}{5(x^2+y^2)}, \frac{4y}{5(x^2+y^2)} \right), f'_s(X_0) = (0.3, -0.4)$$

$$\text{d) } \Omega = \mathbf{R}^3, F(X) = \text{grad } f = (6x^2y^2z^4, 4x^3yz^4, 8x^3y^2z^3), F(X_0) = (6, 4, 8),$$

$$f'_s(X) = \left(\frac{6x^2y^2z^4}{\sqrt{3}}, \frac{4x^3yz^4}{\sqrt{3}}, \frac{8x^3y^2z^3}{\sqrt{3}} \right), f'_s(X_0) = \left(\sqrt{12}, \frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{8}{\sqrt{3}} \right)$$

$$\text{e) } \Omega = \mathbf{R}^3, F(X) = \text{grad } f = (\cos(x + y^2 + z^3), 2y \cos(x + y^2 + z^3), 3z^2 \cos(x + y^2 + z^3)),$$

$$F(X_0) = (-1, -2\pi, -3\pi^2), f'_s(X) = (0, 0, -3z^2 \cos(x + y^2 + z^3)), f'_s(X_0) = (0, 0, 3\pi^2)$$

$$\text{f) } \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, z > 0\}, F(X) = \text{grad } f = (e^xy, e^x, 1/z), F(X_0) = (1, 1, 1),$$

$$f'_s(X) = \left(\frac{e^xy}{\sqrt{3}}, \frac{e^x}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right), f'_s(X_0) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

Príklad 2: Nájdite všetky body oblasti Ω , v ktorých je gradient skalárneho poľa (Ω, f) určeného funkciou f z príkladu 1. na oblasti Ω nulový a všetky tie body, v ktorých je gradient najväčší.

Riešenie: a) bod $[0, 0]$, $|\text{grad } f| = \sqrt{16x^2 + 36y^2}$, neohraničene rastie, $\emptyset$

$$\text{b) } \emptyset, |\text{grad } f| = \frac{\sqrt{(1+x^2)^2 + (1+y^2)^2}}{(1-xy)^2}, \text{ neohraničene rastie, } \emptyset$$

$$\text{c) } \emptyset, |\text{grad } f| = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \text{ nemá stacionárne body, } \emptyset$$

$$\text{d) } \text{všetky body súradnicových rovín, } x = 0, y = 0, z = 0,$$

$$|\text{grad } f| = 2x^2yz^3\sqrt{9y^2z^2 + 4x^2z^2 + 16x^2y^2}, \text{ neohraničene rastie, } \emptyset$$

- e) body ekvipotenciálnych plôch, ktorých súradnice vyhovujú rovniciam
 $x + y^2 + z^3 = k\pi/2, k \in \mathbb{Z}, |\text{grad } f| = \cos r \sqrt{1 + 4y^2 + 9z^4}, r = x + y^2 + z^3$, body,
 ktorých súradnice vyhovujú rovniciam $x + y^2 + z^3 = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- f) $\emptyset, |\text{grad } f| = \sqrt{e^{2x}(y^2 + 1) + \frac{1}{z^2}}$, nemá stacionárne body, $\emptyset$

Príklad 3: Vyjadrite divergenciu vektorového poľa definovaného diferencovateľnou vektorovou funkciou F na $\mathbb{R}^3$, vyčíslite hodnotu divergencie v bode X_0 a určte typ poľa (žriedlové, nežriedlové)

- a) $F(x, y, z) = (x + y + z, y + z, z), X_0 = [1, 1, 1]$
 b) $F(x, y, z) = (x^2z, -2y^3z^2, xy^2z), X_0 = [1, -1, 1]$
 c) $F(x, y, z) = (x^2y, 2xz, -2yz), X_0 = [-1, -1, 0]$
 d) $F(x, y, z) = (y^2, -yz, 2x), X_0 = [0, 0, 1]$
 e) $F(x, y, z) = (xyz, x + y + z, xy + yz), X_0 = [0, 1, 1]$
 f) $F(x, y, z) = (x(1 + y + z), y(x + 1 + z), z(x + y + 1)), X_0 = [1, 1, 1]$

Riešenie: a) $\text{div } F = 3$, žriedlové pole

- b) $\text{div } F = 2xz - 6y^2z^2 + x y^2, \text{div } F(1, -1, 1) = -3$, v poli je nora
 c) $\text{div } F = 2xy - 2y, \text{div } F(-1, -1, 0) = 4$, v poli je žriedlo
 d) $\text{div } F = -z, \text{div } F(0, 0, 1) = -1$, v poli je nora
 e) $\text{div } F = yz + 1 + y, \text{div } F(0, 1, 1) = 3$, v poli je žriedlo
 f) $\text{div } F = 3 + 2(x + y + z), \text{div } F(1, 1, 1) = 9$, v poli je žriedlo

Príklad 4: Nájdite všetky body $\mathbb{R}^3$, v ktorých je divergencia vektorového poľa z príkladu 3. nulová

Riešenie: a) $\text{div } F = 3 \neq 0, \emptyset$

- b) $2xz - 6y^2z^2 + x y^2 = 0$, plocha priestoru určená danou rovnicou
 c) rovina $y = 0$ (súradnicová rovina xz) a rovina $x = 1$ (rovnobežná s rovinou yz)
 d) rovina $z = 0$ (súradnicová rovina xy)
 e) $y(z + 1) + 1 = 0$, plocha priestoru určená danou rovnicou
 f) $2x + 2y + 2z + 3 = 0$, rovina priestoru určená danou rovnicou

Príklad 5: Nájdite rotáciu vektorového poľa určeného vektorovou funkciou F z príkladu 3., vyčíslite jej hodnotu v bode X_0 a zistite rýchlosť víru v danom bode

Riešenie: a) $\text{rot } F = (-1, 1, 1), |\text{rot } F| = \sqrt{3}$, v každom bode poľa je rovnaký vír

- b) $\text{rot } F = (yz(2x + 4y^2), x^2 - y^2z, 0), \text{rot } F(1, -1, 1) = (-6, 0, 0)$, v bode je vír
 c) $\text{rot } F = (-2(x + z), 0, 2z - x^2), \text{rot } F(-1, -1, 0) = (2, 0, -1)$, v bode je vír
 d) $\text{rot } F = (y, -2, -2y), \text{rot } F(0, 0, 1) = (0, -2, 0)$, v bode je vír
 e) $\text{rot } F = (x + z - 1, xy - 1, xz + 1), \text{rot } F(0, 1, 1) = (0, -1, 1)$, v bode je vír
 f) $\text{rot } F = (z - 1, x - z, y - z), \text{rot } F(1, 1, 1) = (0, 0, 0)$, v bode je vír

Príklad 5: Nájdite všetky také body $\mathbf{R}^3$, v ktorých je rotácia vektorového poľa určeného vektorovou funkciou $\mathbf{F}$ z príkladu 3. nulová (v bode nie je vír) a body, v ktorých je rotácia najväčšia.

Riešenie: a) $\emptyset$, konštantná rotácia $|\operatorname{rot} \mathbf{F}| = \sqrt{3}$

b) $[0, 0, z]$ - body osi z a $[0, y, 0]$ - body osi y a body $[-1/2, \pm 1/2, 1]$,

$$|\operatorname{rot} \mathbf{F}| = \sqrt{y^2 z^2 (2x + 4y^2)^2 + (x^2 - y^2 z)^2}, \text{ neohraničene rastie} - \emptyset$$

c) $[0, y, 0]$ - body osi y a $[-1, y, 1]$ - body priamky rovnobežnej s osou y ,

$$|\operatorname{rot} \mathbf{F}| = \sqrt{4(x+z)^2 + (2z-x^2)^2}, \text{ neohraničene rastie} - \emptyset$$

d) $\emptyset$, $|\operatorname{rot} \mathbf{F}| = \sqrt{4+5y^2}$, neohraničene rastie - $\emptyset$

$$\text{e) } \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{2}{1-\sqrt{5}}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right], \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{2}{1+\sqrt{5}}, \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right]$$

$$|\operatorname{rot} \mathbf{F}| = \sqrt{(x+z-1)^2 + (xy-1)^2 + (xz+1)^2}, \text{ neohraničene rastie} - \emptyset$$

f) $[1, 1, 1]$, $|\operatorname{rot} \mathbf{F}| = \sqrt{(z-1)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2}$, neohraničene rastie - $\emptyset$

Príklad 6: Ukážte, či je vektorové pole určené vektorovou funkciou $\mathbf{F}$ nežriedlové a vyjadrite Laplacián poľa v bode $X_0 = [1, 1, 1]$

a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x^2 + 8xy^2z, 3x^3y - 3xy, -4y^2z^2 - 2x^3z)$

b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (-2xz^3, -2yz^3, z^4)$

c) $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy - x^3, x^3, -yz)$

d) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + yz^3, xy^2, -xyz^2)$

e) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)$

f) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2, x^2y^2 + 3y^2z^2 + x^2z^2, -2xz - 2x^2yz - 2yz^3)$

Riešenie: a) $\operatorname{div} \mathbf{F} = x^3 + x \neq 0$, pole nie je nežriedlové, $\Delta \mathbf{F} = 4 + 8y^2$, $\Delta \mathbf{F}(1, 1, 1) = 12$

b) $\operatorname{div} \mathbf{F} = -2z^3 - 2z^3 + 4z^3 = 0$, pole je nežriedlové, $\Delta \mathbf{F} = 12z^2 - 2$, $\Delta \mathbf{F}(1, 1, 1) = 10$

c) $\operatorname{div} \mathbf{F} = y - 3x^2 + 3x^2 - y = 0$, pole je nežriedlové, $\Delta \mathbf{F} = -6x$, $\Delta \mathbf{F}(1, 1, 1) = -6$

d) $\operatorname{div} \mathbf{F} = 1 + 2xy - 2xyz \neq 0$, pole nie je nežriedlové, $\Delta \mathbf{F} = 2x(1 - y)$, $\Delta \mathbf{F}(1, 1, 1) = 0$

e) $\operatorname{div} \mathbf{F} = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 \neq 0$, pole nie je nežriedlové, $\Delta \mathbf{F} = 6x + 6y + 6z$, $\Delta \mathbf{F}(1, 1, 1) = 18$

f) $\operatorname{div} \mathbf{F} = 2x + 2x^2y + 6yz^2 - 2x - 2x^2y - 6yz^2 = 0$, pole je nežriedlové,

$$\Delta \mathbf{F} = x + 2x^2 + 6z^2 - 12yz, \Delta \mathbf{F}(1, 1, 1) = -3$$

Príklad 7: Vyjadrite Laplacián vektorového poľa určeného vektorovou funkciou $\mathbf{F}$ z príkladu 3. a vypočítajte jeho hodnotu v bode X_0

Riešenie: a) $\Delta \mathbf{F} = 0$ v každom bode poľa

b) $\Delta \mathbf{F} = 2z - 12yz^2$, $\Delta \mathbf{F}(1, -1, 1) = 14$

c) $\Delta \mathbf{F} = 2y$, $\Delta \mathbf{F}((-1, -1, 0)) = -2$

d) $\Delta \mathbf{F} = 0$ v každom bode poľa

e) $\Delta \mathbf{F} = 0$ v každom bode poľa

f) $\Delta \mathbf{F} = 0$ v každom bode poľa