

ÚLOHY O VEKTOROVÝCH FUNKCIÁCH II

Príklad 1: Vypočítajte nasledujúce limity

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \lim_{t \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\sin t}{t}, \frac{\cos t - 1}{2t}, e^t \right) \right] & \text{b) } \lim_{t \rightarrow 0} \left[\left(\frac{1 - \sqrt{t}}{1 - t}, \frac{t}{1 + t}, 1 \right) \right] \\ \text{c) } \lim_{t \rightarrow \pi} \left[\left(\frac{\sin t}{t - \pi}, \frac{1 + \cos t}{t}, \frac{t}{\pi} \right) \right] & \text{d) } \lim_{t \rightarrow 1} \left[\left(\frac{e^t - e}{t - 1}, \frac{\ln t - 1}{1 - t}, 2t \right) \right] \end{array}$$

Riešenie: a) (1,0,1), b) (1,0,1), c) (-1,0,1), d) (e, -1,2)

Príklad 2: Nech $\omega \in \mathbf{R}$ je ľubovoľné číslo a $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ sú ľubovoľné vektory a nech je vektorová funkcia určená výrazom $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} \cos \omega t + \mathbf{b} \sin \omega t$. Ukážte, že platí $\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \omega^2 \mathbf{r} = \mathbf{0}$.

Riešenie:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = [-\mathbf{a} \omega \sin \omega t + \mathbf{b} \omega \cos \omega t]' = -\mathbf{a} \omega^2 \cos \omega t - \mathbf{b} \omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 (\mathbf{a} \cos \omega t + \mathbf{b} \sin \omega t) = -\omega^2 \mathbf{r}$$

Príklad 3: Nech $\omega \in \mathbf{R}$ je ľubovoľné číslo a $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ sú ľubovoľné vektory a nech je vektorová funkcia určená výrazom $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} e^{\omega t} + \mathbf{b} e^{-\omega t}$. Ukážte, že platí $\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} - \omega^2 \mathbf{r} = \mathbf{0}$.

Riešenie: $\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = [\mathbf{a} \omega e^{\omega t} - \mathbf{b} \omega e^{-\omega t}]' = \mathbf{a} \omega^2 e^{\omega t} + \mathbf{b} \omega^2 e^{-\omega t} = \omega^2 (\mathbf{a} e^{\omega t} + \mathbf{b} e^{-\omega t}) = \omega^2 \mathbf{r}$

Príklad 4: Určte veľkosť rýchlosti a zrýchlenia bodu pohybujúceho sa po trajektórii danej vektorovou funkciou $\mathbf{r}(t) = (e^t, 2\cos 3t, 2\sin 3t)$ v čase $t = 0$.

Riešenie: $|\mathbf{v}(0)| = \sqrt{37}, |\mathbf{a}(0)| = \sqrt{325}$.

Príklad 5: Určte rýchlosť a zrýchlenie bodu pohybujúceho sa po trajektórii danej vektorovou funkciou $\mathbf{r}(t) = (e^{-t}, \ln(t^2+1), -\tan t)$ v čase $t = 0$.

Riešenie: $\mathbf{v}(0) = (-1, 0, -1), \mathbf{a}(0) = (1, 2, 0)$.

Príklad 6: Určte dráhu pohybujúceho sa bodu $\mathbf{r}(t)$, ak je zrýchlenie bodu dané vektorovou funkciou $\mathbf{a}(t) = (6t, -24t^2, 4\sin t)$, a daná je poloha a rýchlosť bodu v čase $t = 0$, $\mathbf{r}(0) = (2, 1, 0)$, $\mathbf{v}(0) = (-1, 0, 3)$.

Riešenie: $\mathbf{r}(t) = (t^3 - t + 2, 1 - 2t^4, 7t - 4\sin t)$.

Príklad 7: Nájdite primitívne funkcie k vektorovým funkciám:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \mathbf{r}(t) = \left(te^t, \sin^2 t, -\frac{1}{1+t^2} \right) \\ \text{b) } \mathbf{r}(t) = \left(\frac{1}{2}t^2, -t \sin t, 2^t \right) \\ \text{c) } \mathbf{r}(t) = \left(\frac{t}{1+t^2}, te^{t^2}, \cos t \right) \\ \text{d) } \mathbf{r}(t) = \left(\frac{1}{\cos^2 t}, \frac{3^t}{\ln 3}, 2\sin t \cos t \right) \end{array}$$

Riešenie: a) $\mathbf{R}(t) = \left((t-1)e^t + c_1, \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{2} \sin t \right) + c_2, -\arctan t + c_3 \right)$

b) $\mathbf{R}(t) = \left(\frac{t^3}{6} + c_1, (t \cos t - \sin t) + c_2, \frac{2^t}{\ln 2} + c_3 \right)$

c) $\mathbf{R}(t) = \left(\frac{1}{2} \ln(1+t^2) + c_1, \frac{1}{2} e^{t^2} + c_2, \sin t + c_3 \right)$

d) $\mathbf{R}(t) = (\tan t + c_1, 3^t + c_2, \sin^2 t + c_3)$

Príklad 8: Vypočítajte $\int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{r}(t) dt$, pre vektorové funkcie

a) $\mathbf{r}(t) = \sin^2 t \cos t \mathbf{i} + \cos^2 t \sin t \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\alpha = 0$, $\beta = \pi$

b) $\mathbf{r}(t) = (2t + \pi) \mathbf{i} + t \sin t \mathbf{j} + \pi \mathbf{k}$, $\alpha = 0$, $\beta = \pi$

c) $\mathbf{r}(t) = \left(\frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}}, \frac{1}{2} e^{\frac{t}{2}}, e^t \right)$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$

d) $\mathbf{r}(t) = 4 \sin t \cos t \mathbf{i} + (3t^2 - 2t + 1) \mathbf{j} + t^{-1} \mathbf{k}$, $\alpha = \pi$, $\beta = 2\pi$

Riešenie: a) $\frac{2}{3} \mathbf{j} + \pi \mathbf{k}$, b) $2\pi^2 \mathbf{i} + \pi \mathbf{j} + \pi^2 \mathbf{k}$, c) $(1 - e^{\frac{1}{2}}) \mathbf{i} + (e^{\frac{1}{2}} - 1) \mathbf{j} + (e - 1) \mathbf{k}$, d) $(0, 7\pi^3 - 3\pi^2 + 3\pi, \ln \pi)$

Príklad 9: Nájdite rozvoj vektorovej funkcie do Taylorovho radu až do rádu 4 pre $t = 0$,

$\mathbf{r}(t) = ((t-1)e^t, t + \sin t, \ln(t+1))$

Riešenie:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}(0) + \frac{\mathbf{r}'(0)}{1!} (t-0) + \frac{\mathbf{r}''(0)}{2!} (t-0)^2 + \frac{\mathbf{r}'''(0)}{3!} (t-0)^3 + \frac{\mathbf{r}^{(4)}(0)}{4!} (t-0)^4 = \\ &= (-1, 0, 0) + (0, 2, 1)t + \frac{1}{2} (1, 0, -1)t^2 + \frac{1}{6} (2, -1, 2)t^3 + \frac{1}{24} (3, 0, -6)t^4 = \\ &= \left(-1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{8}t^4, 2t - \frac{1}{6}t^3, t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 \right) \end{aligned}$$

Príklad 10: Nájdite hodnotu premennej $\xi \in \langle 2, 3 \rangle$, v ktorej pre hodnoty vektorovej funkcie

$\mathbf{r}(t) = (t^2 - 2t + 1, t^2 - 1)$ na danom intervale platí veta o strednej hodnote, teda nerovnosť

$|\mathbf{r}(\beta) - \mathbf{r}(\alpha)| \leq (\beta - \alpha) |\mathbf{r}'(\xi)|$.

Riešenie: $\xi = 5/2$, $|\mathbf{r}'(5/2)| = \sqrt{34}$

