

ÚLOHY O VEKTOROVÝCH FUNKCIÁCH I

Príklad 1: Nájdite vektorovú funkciu, ktorej grafom je úsečka AB , $A = [-1, 2, 1]$, $B = [1, 0, -3]$.

Riešenie: $r(t) = (-1+2t, 2-2t, 1-4t)$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$

Príklad 2: Nájdite vektorovú funkciu definovanú pre $t \in \langle 0, 1 \rangle$, ktorej skalárne súradnicové funkcie sú polynómy, a ktorej graf prechádza bodmi $A = [2, 2, 1]$, $B = [1, 3, 4]$, $C = [0, 4, 2]$ v danom poradí.

Riešenie: $r(t) = (2-2t, 2+2t, 1+11t-10t^2)$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$

Príklad 3: Určte definičný obor a obor hodnôt vektorovej funkcie $f(t) = (-1+2t^3, t^2+2t+4, 3t)$, vypočítajte jej hodnotu v bodoch $t = 0$, $t = 1$, $t = -1$ a vektory znázornite.

Riešenie: $D(f) = \mathbf{R}$, $H(f) \subset V^3(\mathbf{R})$, množina vektorov, medzi ktoré patria aj vektory $f(0) = (-1, 4, 0)$, $f(1) = (1, 7, 3)$, $f(-1) = (-3, 3, -3)$.

Príklad 4: Určte definičný obor a obor hodnôt vektorovej funkcie

$r(t) = \left(\frac{a}{\cos t}, b \tan t \right)$, $a, b \in \mathbf{R}$, a zobrazte jej graf.

Riešenie: $t \in \langle 0, 2\pi \rangle - \{\pi/2, 3\pi/2\}$, obor hodnôt je množina vektorov zvierajúcich s kladnou polosou x uhly v intervaloch $(-\varphi, \varphi) \cup (\pi-\varphi, \pi+\varphi)$, $\varphi = \arctan(b/a)$, grafom je hyperbola.

Príklad 5: Zistite, pre ktorú hodnotu premennej t je dĺžka vektora, ktorý je hodnotou funkcie $r(t) = (2+t, t^2-1, 1-t)$ definovanej na intervale $\langle -1, 1 \rangle$ najmenšia, resp. najväčšia.

Riešenie: $d(t) = (1, 0, 2)$, $d(-1)$

$$d(t) = \sqrt{t^4 + 2t + 6}, d(-1) = \sqrt{5}, t_{\max} = 1, d(1) = 3, t_{\min} = -\sqrt[3]{-\frac{1}{2}}, d(\sqrt[3]{-\frac{1}{2}}) = \sqrt{6 + \frac{3}{2}\sqrt[3]{-\frac{1}{2}}}$$

Príklad 6: Zistite veľkosť uhla vektorov, ktoré sú hodnotami dvoch vektorových funkcií

$r(t) = (a \cos t, b \sin t)$, $a, b \in \mathbf{R}$, a $p(t) = (c \sin t, d \cos t)$, $c, d \in \mathbf{R}$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ v bode $t = \frac{\pi}{4}$

a vypočítajte ich vektorový súčin. Vyčísľte pre $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$, $d = 12$.

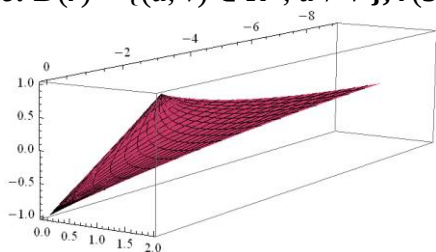
Riešenie:

$$\cos \varphi = \frac{ac + bc}{\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}}, r\left(\frac{\pi}{4}\right) \times p\left(\frac{\pi}{4}\right) = (0, 0, \frac{ad - bc}{2})$$

$$\cos \varphi = \frac{35}{65}, \varphi = \arccos \frac{35}{65} = 1,002 \text{ rad}, r\left(\frac{\pi}{4}\right) \times p\left(\frac{\pi}{4}\right) = (0, 0, 8)$$

Príklad 7: Nájdite obor definície vektorovej funkcie $r(u, v) = (u, v, 2u/(u-v), (u+v)/(u-v))$. Zistite hodnotu funkcie v bodoch $(3, -3)$, $(3, 0)$, $(0, -3)$, a zobrazte časť grafu vektorovej funkcie nad oblasťou $\langle 0, 3 \rangle \times \langle -3, 0 \rangle$.

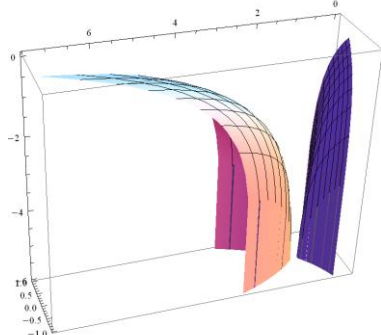
Riešenie: $D(r) = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2, u \neq v\}$, $r(3, -3) = (-9, 1, 0)$, $r(3, 0) = (0, 2, 1)$, $r(0, -3) = (0, 0, -1)$.



Príklad 8: Nájdite obor definície vektorovej funkcie $\mathbf{r}(u, v) = (e^{u+v}, \ln(u \cdot v), (u - v))$. Zistite hodnotu funkcie v bodoch $(-1, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$ a zobrazte časť grafu vektorovej funkcie nad oblasťou $\langle -1, 1 \rangle^2$.

Riešenie: $D(\mathbf{r}) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : (u > 0 \wedge v > 0) \vee (u < 0 \wedge v < 0)\}$

$\mathbf{r}(-1, -1) = (e^{-2}, 0, 0)$, $\mathbf{r}(1, 1) = (e^2, 0, 0)$, $\mathbf{r}(-1, 1)$ a $\mathbf{r}(1, -1)$ nie je definované.

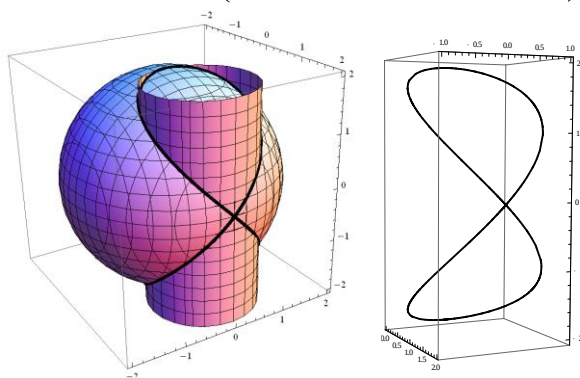


Príklad 9: Vivianiho krivka je priekovú krivka guľovej plochy určenej implicitnou rovnicou $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ s valcovou plochou určenou rovnicou $x^2 + y^2 = ax$, jej priemetom do súradnicovej roviny xy je kružnica so zhodnou rovnicou $x^2 + y^2 = ax$. Nájdite vektorovú funkciu, ktorej grafom je Vivianiho krivka, vypočítajte súradnice jej samopriesečníka a jej priesečníka s osou z . Priek plôch spolu s krivkou zobrazte.

$$\mathbf{z} = t, \mathbf{r}(t) = \left(\frac{a^2 - t^2}{a}, \pm t \sqrt{\frac{a^2 - t^2}{a}}, t \right), t \in \langle -a, a \rangle$$

Riešenie:

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{a}{2}(1 + \cos t), \frac{a}{2} \sin t, a \sin \frac{t}{2} \right), t \in \langle 0, 4\pi \rangle$$



Príklad 10: Nájdite vektorovú funkciu, ktorej grafom je priestorová krivka určená ako priek hyperbolického paraboloidu a rotačnej valcovej plochy s rovnicami $z = xy$, $x^2 + y^2 = 1$. Vypočítajte súradnice priesečníkov krivky s osami x a y .

Riešenie: $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, \cos t \sin t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $X_{1,2} = [\pm 1, 0, 0]$, $Y_{1,2} = [0, \pm 1, 0]$.

