Dagmar Szarková

Kužeľosečky

Kužeľosečky sú rovinné krivky druhého stupňa, ktoré delíme na
a) regulárne kužeľosečky: elipsa, parabola hyperbola;
b) singulárne kužeľosečky: bod, priamka, dve priamky.

Všetky typy kužeľosečiek môžeme získať ako rezy kužeľovej plochy rovinou.
a) Ak rezová rovina neprechádza vrcholom, rezom kužeľovej plochy je regulárna kužeľosečka.
b) Ak je rezová rovina vrcholová (prechádza vrcholom), rezom kužeľovej plochy je singulárna kužeľosečka.

V analytickej geometrii ste sa zoznámili s rovnicami kužeľosečiek. Pre zopakovanie si uvedieme definície, dôležité pojmy a ich označovanie. Osvojíme si ohniskové konštrukcie, ktoré vychádzajú z definícií, ako i ďalšie konštrukcie, ktoré umožňujú narysovať kužeľosečky rýchlejšie ako bodové ohniskové konštrukcie. Uvedieme tiež úlohy, ktoré technik v praxi najčastejšie potrebuje.

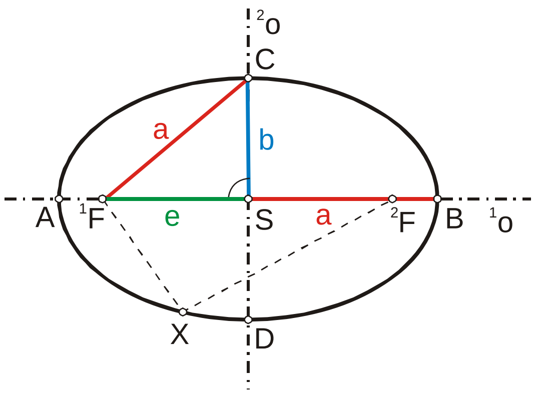
1. Definície, označenia a ohniskové konštrukcie kužeľosečiek

1.1. Elipsa

Definícia: Elipsa je množina všetkých bodov v rovine $\mathbf{E_2}$, ktoré majú od dvoch rôznych bodov $^1\mathbf{F}$, $^2\mathbf{F}$ stály súčet vzdialeností rovný $2\mathbf{a}$, pričom $2\mathbf{a}>|{}^1\mathbf{F}{}^2\mathbf{F}|$.

(1) Symbolický zápis: **elipsa** $= \{\mathbf{X}\in \mathbf{E_2};\ |\mathbf{X}{}^1\mathbf{F}|+|\mathbf{X}{}^2\mathbf{F}|=2\mathbf{a},\ 2\mathbf{a}>|{}^1\mathbf{F}{}^2\mathbf{F}|\}$

Pojmy a ich označenie (obr.1)



Obr. 1.

$^1\mathbf{F}, {}^2\mathbf{F}$ – ohniská
$^1\mathbf{o}$ – hlavná os ($^1\mathbf{o}={}^1\mathbf{F}{}^2\mathbf{F}$)
$^2\mathbf{o}$ – vedľajšia os (os úsečky $^1\mathbf{F}{}^2\mathbf{F}$)
S – stred
A, **B** – hlavné vrcholy
C, **D** – vedľajšie vrcholy
a – dĺžka hlavnej polosi $\mathbf{a}=|\mathbf{AS}|=|\mathbf{BS}|$
b – dĺžka vedľajšej polosi $\mathbf{b}=|\mathbf{CS}|=|\mathbf{DS}|$
e – excentricita $\mathbf{e}=|{}^1\mathbf{FS}|=|{}^2\mathbf{FS}|$
$\Delta{}^1\mathbf{FSC}$ - charakteristický trojuholník

Dĺžky **a**, **b** reprezentujú konštanty v rovnici elipsy

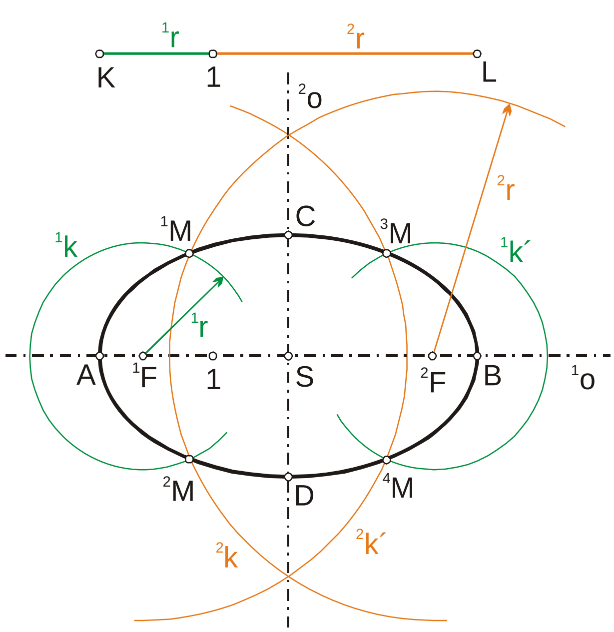
$$\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{m})^2}{\mathbf{a}^2}+\frac{(\mathbf{y}-\mathbf{n})^2}{\mathbf{b}^2}=1$$

so stredom $\mathbf{S}(\mathbf{m};\mathbf{n})$.
Vzťah medzi dĺžkami **a**, **b** vyjadruje Pytagorova veta

$$\mathbf{a}^2=\mathbf{b}^2+\mathbf{e}^2.$$

Ohnisková konštrukcia elipsy (obr.2)

Dané sú ohniská $^1\mathbf{F}$, $^2\mathbf{F}$ a úsečka **KL** dĺžky 2**a**, 2**a**>|$^1\mathbf{F}^2\mathbf{F}$|. Zostrojme elipsu ako množinu bodov s vlastnosťou (1).



Obr. 2.

Úsečku **KL** je vhodné umiestniť na os $^1\mathbf{o}$ tak, aby sa jej stred stotožnil so stredom úsečky $^1\mathbf{F}^2\mathbf{F}$, potom krajné body **K**, **L** sa stotožnia s hlavnými vrcholmi **A**, **B** elipsy. Bod **1** a ďalšie pomocné body volíme medzi bodmi $^1\mathbf{F}$ a **S**.

Body elipsy získame v prieniku kružníc: $^1k \cap {}^2k = \{^1M, {}^2M\}$, $^1k' \cap {}^2k' = \{^3M, {}^4M\}$, pričom

$^1r = |A1|$, $^2r = |B1|$,

$^1k(^1F; {}^1r)$, $^1k'(^2F; {}^1r)$,

$^2k(^2F; {}^2r)$, $^2k'(^1F; {}^2r)$.

Každý z bodov ^iM, $i = 1, \ldots, 4$ spĺňa vlastnosť:

$|^iM\,^1F| + |^iM\,^2F| = 2a$,

je teda bodom elipsy. Vhodnou voľbou ďalších pomocných bodov a opakovaním konštrukcie získame nové štvorice bodov elipsy.

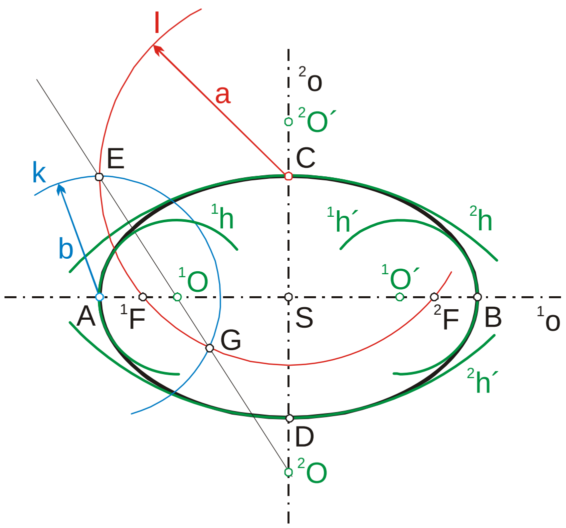
Z konštrukcie vyplýva, že elipsa je súmerná podľa osí $^1\mathbf{o}$, $^2\mathbf{o}$ i podľa stredu **S**.

Je užitočné osvojiť si konštrukciu kužeľosečiek pomocou hyperoskulačných kružníc, ktorú technici veľmi často používajú.
Hyperoskulačné kružnice nám nahrádzajú oblúky kužeľosečiek v malom okolí ich vrcholov. (obr.3)

Ak skombinujeme ohniskovú konštrukciu kužeľosečky s hyperoskulačnými kružnicami, získame veľmi dobrý základ pre dorysovanie kužeľosečky pomocou krívidla.

Hyperoskulačné kružnice elipsy (obr.3)

Úloha č. 1: Zostrojte elipsu, ktorá je daná dĺžkou hlavnej polosi **a** a dĺžkou vedľajšej polosi **b**, pomocou hyperoskulačných kružníc.



Obr. 3.

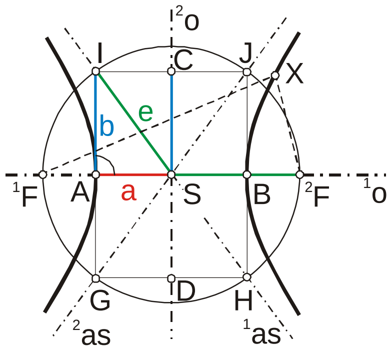
Riešenie: (obr.3)
Priesečníky **E** a **G** kružníc **k**(**A**,**b**) a **l**(**C**,**a**) určujú priamku, ktorá pretína osi $^1\mathbf{o}$, $^2\mathbf{o}$ v stredoch $^1\mathbf{O}$, $^2\mathbf{O}$ ***hyperoskulačných kružníc*** pre vrcholy **A** a **C**.
Kružnicové oblúky
$^1h(^1O; |^1OA|)$, $^2h(^2O; |^2OC|)$, a $^1h'$, $^2h'$,
ktoré sú ich obrazmi v stredovej súmernosti so stredom **S**, umožnia rýchle narysovanie elipsy pomocou krividla.
Kružnicové oblúky ^1h, $^1h'$, sú celé znútra, oblúky ^2h, $^2h'$, celé zvonka elipsy.

1.2. Hyperbola

Definícia: Hyperbola je množina všetkých bodov v rovine $\mathbf{E_2}$, ktoré majú od dvoch rôznych bodov $^1\mathbf{F}$, $^2\mathbf{F}$ stály rozdiel vzdialeností rovný $2\mathbf{a}$, pričom $0<2\mathbf{a}<|^1\mathbf{F}^2\mathbf{F}|$.

(2) Symbolický zápis: **hyperbola** $= \{\mathbf{X} \in \mathbf{E}_2;\ ||\mathbf{X}^1\mathbf{F}|-|\mathbf{X}^2\mathbf{F}||=2\mathbf{a},\ 0<2\mathbf{a}<|^1\mathbf{F}^2\mathbf{F}|\}$

Pojmy a ich označenie (obr.4)



Obr. 4.

$^1\mathbf{F}$, $^2\mathbf{F}$ – ohniská
$^1\mathbf{o}$ – hlavná os ($^1\mathbf{o}={}^1\mathbf{F}^2\mathbf{F}$)
$^2\mathbf{o}$ – vedľajšia os (os úsečky $^1\mathbf{F}^2\mathbf{F}$)
S – stred
A, **B** – hlavné vrcholy
a – dĺžka hlavnej polosi $\mathbf{a}=|\mathbf{AS}|=|\mathbf{BS}|$
b – dĺžka vedľajšej polosi $\mathbf{b}=|\mathbf{CS}|=|\mathbf{DS}|$
e – excentricita $\mathbf{e}=|^1\mathbf{FS}|=|^2\mathbf{FS}|$
∆ **IAS** – charakteristický trojuholník
□ **IJGH** – charakteristický obdĺžnik
$^1\mathbf{as}$, $^2\mathbf{as}$ – asymptoty

Body **C**, **D** na vedľajšej osi nepatria hyperbole. Sú stredmi protiľahlých strán charakteristického obdĺžnika **IJHG**, ktorý umožní ľahko zostrojiť asymptoty hyperboly: $^1\mathbf{as}=\mathbf{IS}$, $^2\mathbf{as}=\mathbf{JS}$.

Rovnica $\dfrac{\mathbf{x}^2}{\mathbf{a}^2}-\dfrac{\mathbf{y}^2}{\mathbf{b}^2}=1$

vyjadruje hyperbolu so stredom **S**(0;0) a hlavnou osou $^1\mathbf{o}$ v **x**-ovej súradnicovej osi.
Asymptoty uvedenej hyperboly majú rovnice

$$\mathbf{y}=\pm\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}\mathbf{x}$$

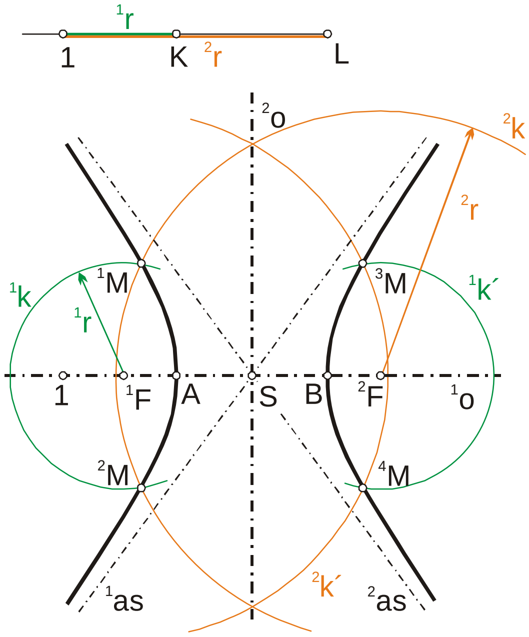
Rovnica $$\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{m})^2}{\mathbf{a}^2}-\frac{(\mathbf{y}-\mathbf{n})^2}{\mathbf{b}^2}=1$$

vyjadruje hyperbolu so stredom **S**(**m**;**n**) a hlavnou sou $^1\mathbf{o}$ rovnobežnou s **x**-ovou súradnicovou osou.

Z charakteristického trojuholníka **IAS** hyperboly vyplýva vzťah, ktorý vyjadruje Pytagorova veta: $\mathbf{e}^2=\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2$.

Ohnisková konštrukcia hyperboly (obr.5)

Dané sú ohniská ${}^1\mathbf{F}$, ${}^2\mathbf{F}$ a úsečka **KL** dĺžky 2**a**, $2\mathbf{a}<|{}^1\mathbf{F}{}^2\mathbf{F}|$. Zostrojme hyperbolu ako množinu bodov s vlastnosťou (2).



Obr. 5.

Úsečku **KL** je vhodné umiestniť na priamku ${}^1\mathbf{o}$ tak, aby sa jej stred stotožnil so stredom úsečky ${}^1\mathbf{F}{}^2\mathbf{F}$, potom krajné body **K**, **L** sa stotožnia s hlavnými vrcholmi **A**, **B** hyperboly. Bod **1** a ďalšie pomocné body volíme z vnútorných bodov na polpriamke opačnej k polpriamke ${}^1\mathbf{FS}$.

Priesečníky kružníc: ${}^1\mathbf{k}\cap{}^2\mathbf{k}=\{{}^1\mathbf{M},{}^2\mathbf{M}\}$, ${}^1\mathbf{k}'\cap{}^2\mathbf{k}'=\{{}^3\mathbf{M},{}^4\mathbf{M}\}$ sú bodmi hyperboly, pričom

${}^1\mathbf{r}=|\mathbf{A1}|$, ${}^2\mathbf{r}=|\mathbf{B1}|$,

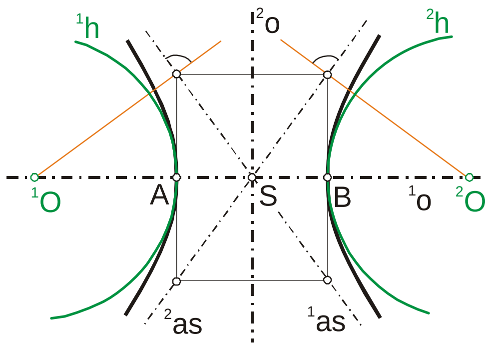
${}^1\mathbf{k}({}^1\mathbf{F};{}^1\mathbf{r})$, ${}^1\mathbf{k}'({}^2\mathbf{F};{}^1\mathbf{r})$,

${}^2\mathbf{k}({}^2\mathbf{F};{}^2\mathbf{r})$, ${}^2\mathbf{k}'({}^1\mathbf{F};{}^2\mathbf{r})$.

Každý z bodov ${}^i\mathbf{M}$, $\mathbf{i}=\mathbf{1},\dots,\mathbf{4}$ spĺňa vlastnosť: $||{}^i\mathbf{M}{}^1\mathbf{F}|-|{}^i\mathbf{M}{}^2\mathbf{F}||=2\mathbf{a}$, je teda bodom hyperboly.

Z konštrukcie vyplýva, že hyperbola je súmerná podľa osí ${}^1\mathbf{o}$, ${}^2\mathbf{o}$ i podľa stredu **S**.

Hyperoskulačné kružnice hyperboly (obr.6)



Obr. 6.

Kolmice na asymptoty prechádzajúce vrcholmi charakteristického obdĺžnika pretínajú hlavnú os ${}^1\mathbf{o}$ v strede ${}^1\mathbf{O}$, ${}^2\mathbf{O}$ *hyperoskulačných kružníc*. Kružnicové oblúky

${}^1\mathbf{h}({}^1\mathbf{O};|{}^1\mathbf{OA}|)$, ${}^2\mathbf{h}({}^2\mathbf{O};|{}^2\mathbf{OB}|)$

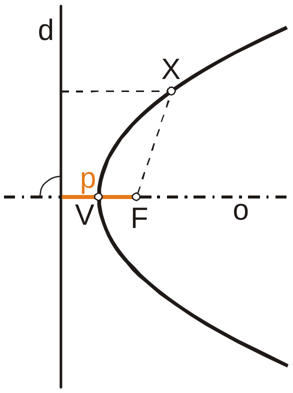
sú celé znútra oblúka hyperboly.

1.3. Parabola

Definícia: Parabola je množina všetkých bodov v rovine E_2, ktoré majú rovnaké vzdialenosti od danej priamky **d** a od daného bodu **F**, pričom **F**$\notin$**d**.

(3) Symbolický zápis: **parabola** = {**X**$\in$ E_2; |**Xd**|=|**XF**|, **F**$\notin$**d**}

Pojmy a ich označenie (obr.7)

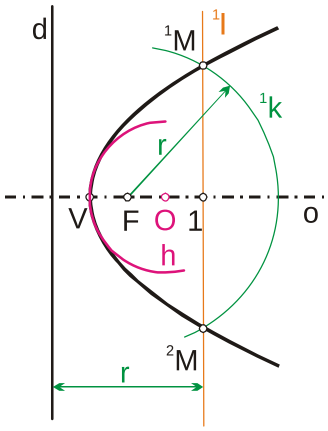


Obr. 7.

F – ohnisko
d – riadiaca priamka
p – parameter paraboly **p**=|**Fd**|
o – os **F**$\in$**o** $\wedge$ **o**$\perp$**d**
V – vrchol **V**$\in$**o** $\wedge$ |**Vd**|=|**VF**|

Ohnisková konštrukcia paraboly (obr.8)

Dané je ohnisko **F** a riadiaca priamka **d**.



Obr. 8.

Na polpriamke **VF** zvoľme bod **1**. Body paraboly sú v prieniku pomocnej kružnice ^{1}**k**(**F**;|**1d**|), s priamkou ^{1}**l** prechádzajúcou bodom **1** a rovnobežnou s riadiacou priamkou **d**

^{1}**k**$\cap$^{1}**l**={^{1}**M**,^{2}**M**}.

Body ^{1}**M**, ^{2}**M** spĺňajú vlastnosť (3) , preto sú bodmi paraboly. Voľbou ďalších pomocných bodov z polpriamky **VF** a opakovaním konštrukcie popísanej pre pomocný bod **1** získame ďalšie dvojice bodov paraboly.

Parabola je súmerná podľa osi **o**, ako vyplýva z konštrukcie jej bodov ^{1}**M**, ^{2}**M**

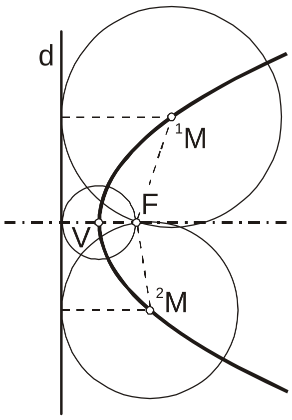
Parabola s osou **o** rovnobežnou s **x**-ovou súradnicovou osou a s vrcholom **V**(**m**;**n**) má rovnicu

$(y-n)^2 = 2p(x-m)$,

resp. $(y-n)^2 = -2p(x-m)$, ak ohnisko je vľavo od vrchola.

Hyperoskulačná kružnica paraboly (obr.8)

Hyperoskulačná kružnica **h**(**O**;**p**=|**Fd**|) pre vrchol paraboly má stred **O** na osi **o** a polomer rovný dĺžke parametra **p** paraboly, leží celá znútra oblúka paraboly.



Obr. 9

Parabolu s riadiacou priamkou **d** a ohniskom **F** možno vnímať tiež ako množinu stredov všetkých kružníc, ktoré sa dotýkajú priamky **d** a prechádzajú bodom **F** (obr.9).

2. Bod a kužeľosečka

Vnútorné body kužeľosečky sú tie, ktoré ležia spolu s ohniskami v oblasti ohraničenej kužeľosečkou.

Ostatné body roviny, okrem bodov kužeľosečky, sú ***vonkajšie body*** kužeľosečky.

3. Priamka a kužeľosečka (obr.10-12)

Nesečnica je priamka, ktorá obsahuje iba vonkajšie body kužeľosečky (v obr.10-12 – priamka **a**).

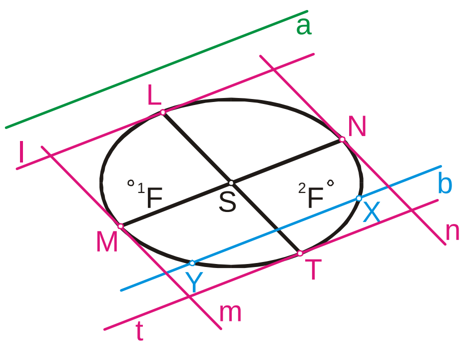
Sečnica je priamka, ktorá má s kužeľosečkou 2 rôzne spoločné body (v obr.10-12 – priamka **b**).
Každá priamka, ktorá je rovnobežná s asymptotou hyperboly, má s hyperbolou jeden spoločný bod (v obr.11 – priamka **c**).

Dotyčnica je priamka **t** , ktorá má s kužeľosečkou iba jeden spoločný bod **T** (***dotykový bod***) a ostatné jej body sú vonkajšie.

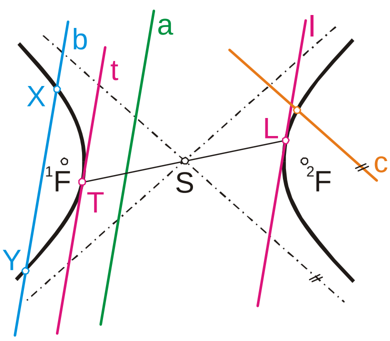
Tetiva je úsečka s krajnými bodmi na kužeľosečke, ktorej vnútorné body sú vnútornými bodmi kužeľosečky (v obr.10-12 – úsečka **XY**).

Priemer stredovej kužeľosečky je úsečka, ktorá obsahuje stred a krajné body má na kužeľosečke (v obr.10-11 – úsečka **TL**).
Priemer paraboly je polpriamka **q** rovnobežná s osou **o** paraboly, ktorej začiatok je bodom paraboly a je súhlasne orientovaná s polpriamkou **VF** (obr.12).

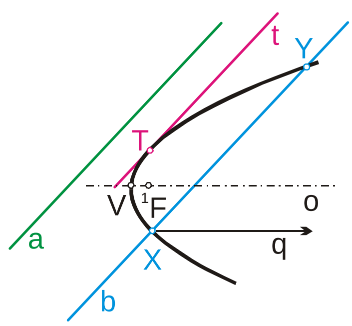
Združené priemery sú dvojicou priemerov s takou vlastnosťou, že dotyčnice v krajných bodoch jedného priemeru sú rovnobežné s druhým priemerom (obr.10).
Existuje iba jeden pár združených priemerov na seba kolmých, ktoré ležia na hlavnej a vedľajšej osi – **AB** je najväčší a **CD** najmenší zo všetkých priemerov danej elipsy (obr.28).



Obr. 10.



Obr. 11.



Obr. 12.

Vety o dotyčniciach (obr.13-15)

Sprievodiče **^{1}s**, **^{2}s** sú priamky, ktoré spájajú bod kužeľosečky s jej ohniskami (obr.13-14).

Aby sme vety o dotyčniciach kužeľosečiek mohli formulovať všeobecnejšie, je účelné zaviesť pojem druhého sprievodiča bodu paraboly – budeme ním rozumieť priamku **^{2}s**, ktorá prechádza bodom paraboly a je rovnobežná s jej osou (obr.15).

Vonkajším uhlom sprievodičov budeme nazývať uhol, ktorý obsahuje hlavný vrchol.

Vnútorný uhol sprievodičov je susedný k vonkajšiemu uhlu sprievodičov.

V hlavnom vrchole obidva sprievodiče splývajú do jednej priamky. Za vonkajší uhol pokladáme ktorýkoľvek z obidvoch priamych uhlov, ktorých ramená splývajú s hlavnou osou.

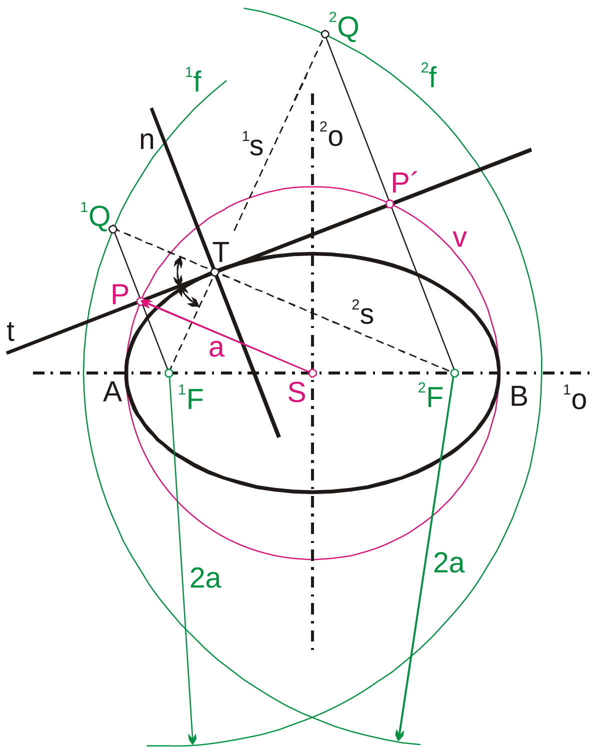
Veta 1: Dotyčnica rozpoľuje vonkajší uhol sprievodičov dotykového bodu (obr.13-15).

Veta 2: Normála je kolmica na dotyčnicu v dotykovom bode (rozpoľuje vnútorný uhol sprievodičov dotykového bodu) (obr.13-15).

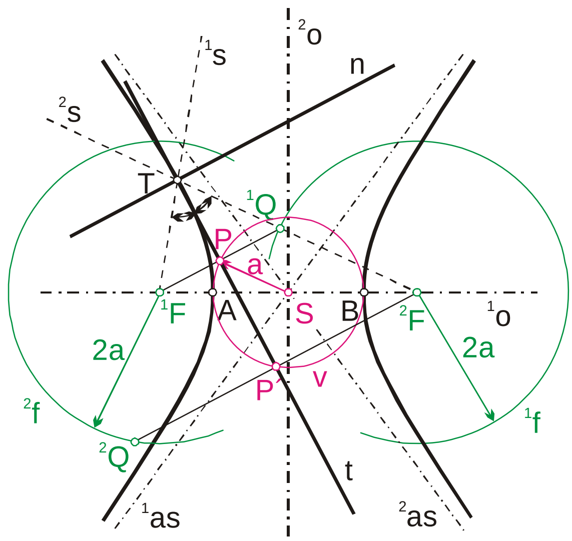
Veta 3: (o bodoch **Q**) Množina všetkých bodov **Q** súmerne združených s jedným ohniskom elipsy (hyperboly) podľa jej dotyčníc je kružnica so stredom v druhom ohnisku a polomerom 2**a** (obr.13-14).

Bod **^{1}Q** je bod súmerne združený s ohniskom **^{1}F** podľa dotyčnice **t**, **^{1}Q**$\in$**^{1}f**(**^{2}F**;2**a**) ;
bod **^{2}Q** je bod súmerne združený s ohniskom **^{2}F** podľa dotyčnice **t**, **^{2}Q**$\in$**^{2}f**(**^{1}F**;2**a**).
Kružnice **^{1}f**, **^{2}f** nazývame ***riadiacimi kružnicami***.

Spojnica bodu **^{i}Q** (**i**=**1**,**2**) so stredom riadiacej kružnice, na ktorej leží, pretína dotyčnicu v jej dotykovom bode.

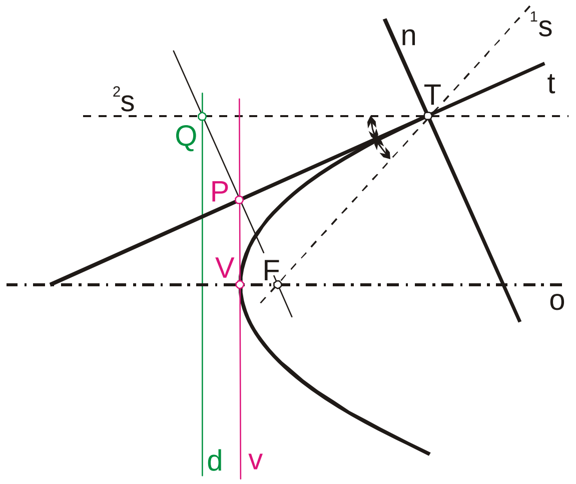


Obr. 13.



Obr. 14.

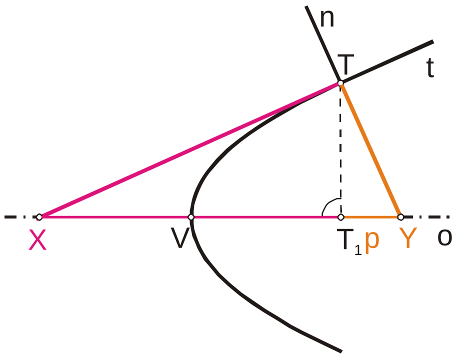
Veta 4: (o bodoch **P**) Množina všetkých piat **P** kolmíc vedených ohniskom na dotyčnice elipsy (hyperboly) je kružnica **v** so stredom **S** a polomerom rovným dĺžke hlavnej polosi **a**, ktorú nazývame ***vrcholovou kružnicou*** **v**(**S**;**a**) (obr.13-14).



Obr. 15.

Veta 3´: (o bodoch **Q**) Množina všetkých bodov **Q** súmerne združených s ohniskom paraboly podľa jej dotyčníc je jej ***riadiaca priamka* d** (obr.15).

Veta 4´: (o bodoch **P**) Množina všetkých piat **P** kolmíc vedených ohniskom na dotyčnice paraboly je jej ***vrcholová dotyčnica* v** (t.j. dotyčnica vo vrchole **V**) (obr.15).



Obr. 16.

Subtangentou budeme nazývať dĺžku úsečky |**XT₁**|, ktorá je určená priesečníkom **X** dotyčnice paraboly s jej osou a pätou **T₁** kolmice z bodu **T** na os paraboly (obr.16).

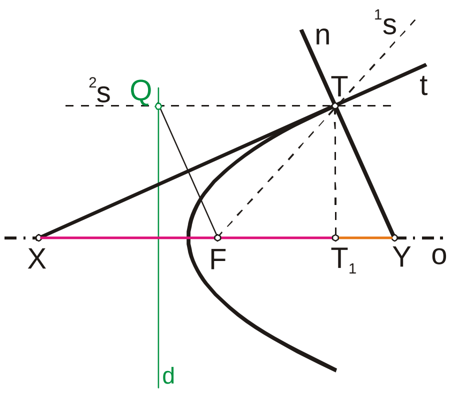
Subnormálou budeme nazývať dĺžku úsečky |**YT₁**|, ktorá je určená priesečníkom **Y** normály paraboly s jej osou a pätou **T₁** kolmice z bodu **T**, ktorým normála prechádza, na os paraboly (obr.16).

Veta 5: Vrchol rozpoľuje subtangentu – |**XV**|=|**VT₁**| (obr.16).

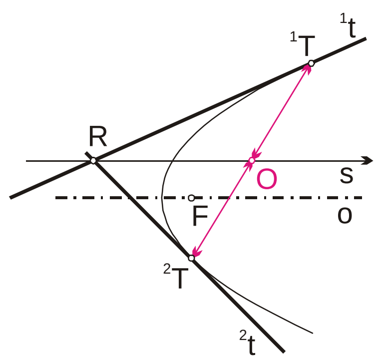
Veta 6: Dĺžka subnormály sa rovná parametru paraboly **p**=|**T₁Y**| (obr.16).

Veta 7: Ohnisko rozpoľuje úsečku, ktorá je súčtom subtangenty a subnormály. |**QT**|=|**XF**|=|**FY**| (obr.17)

Veta 8: Spojnica priesečníka dvoch rôznych dotyčníc **¹t**, **²t** paraboly so stredom tetivy určenej ich dotykovými bodmi **¹T**, **²T** je rovnobežná s osou paraboly. (obr.18)



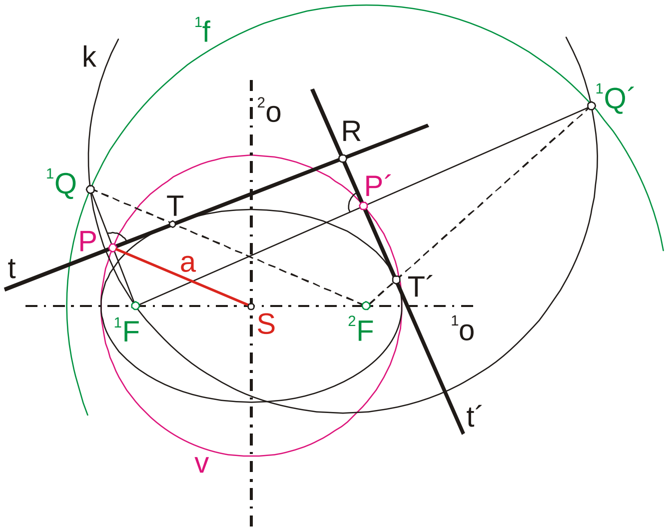
Obr.17



Obr. 18

V praxi sa veľmi často stretávame s úlohou narysovať dotyčnice z bodu k elipse (napr.obrysové tvoriace priamky kužeľovej plochy), resp. narysovať dotyčnice rovnobežné s daným smerom (napr. obrysové tvoriace priamky valcovej plochy).

Úloha č. 2: Zostrojte dotyčnice k elipse z jej vonkajšieho bodu **R** . Elipsa je daná ohniskami **^{1}F**,**^{2}F** a dĺžkou hlavnej polosi **a**.(obr.19)

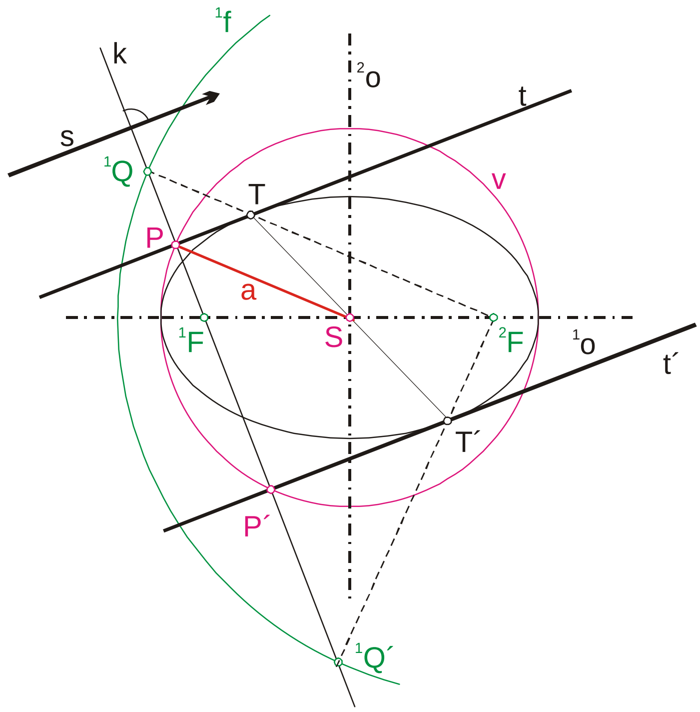


Obr. 19.

Rozbor: Pre bod **^{1}Q**, ktorý je súmerne združený s ohniskom **^{1}F** podľa hľadanej dotyčnice **t** musí platiť: |**^{1}QR**|=|**^{1}FR**|. Z toho vyplýva, že **^{1}Q** leží na kružnici **k**(**R**;|**R^{1}F**|). Podľa vety 3 (o bodoch **Q**) bod **^{1}Q** musí ležať na riadiacej kružnici **^{1}f**(**^{2}F**;2**a**).

Riešenie: Body **^{1}Q** a **^{1}Q´** nájdeme v prieniku kružníc **k** a **^{1}f**.
Dotyčnice **t** a **t´** prechádzajú bodom **R** a sú osami úsečkiek **^{1}F^{1}Q** a **^{1}F^{1}Q´**.
Dotykové body **T** a **T´** získame v prieniku dotyčnice **t** resp. **t´** so spojnicou bodu **^{1}Q** resp. **^{1}Q´** so stredom **^{2}F** riadiacej kružnice **^{1}f**.

Úloha č. 3: Zostrojte dotyčnice k elipse rovnobežné s daným smerom **s**. Elipsa je daná ohniskami **^{1}F**,**^{2}F** a dĺžkou hlavnej polosi **a**.(obr.20)



Obr. 20.

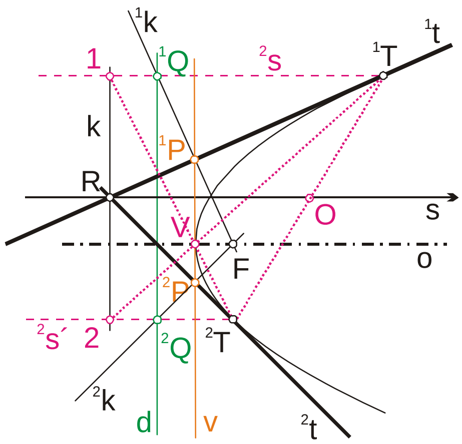
Rozbor: Pre bod **^{1}Q**, ktorý je súmerne združený s ohniskom **^{1}F** podľa hľadanej dotyčnice **t** musí platiť, že leží na kolmici **k** zostrojenej z ohniska **^{1}F** na daný smer **s**, kde leží aj bod **P** – päta kolmice na dotyčnicu **t**. Podľa vety 4 (o bodoch **P**) bod **P** leží aj na vrcholovej kružnici **v**(**S**;**a**).
Podľa vety 3 (o bodoch **Q**) bod **^{1}Q** musí ležať na riadiacej kružnicici **^{1}f**(**^{2}F**;2**a**).

Riešenie: Body **^{1}Q** a **^{1}Q´** nájdeme v prieniku kolmice **k** a kružnice **^{1}f** a body **P** a **P´** jako prienik kolmice **k** a kružnice **v**.
Dotyčnica **t**, resp. **t´** prechádza bodom **P**, resp. **P´** a je rovnobežná s daným smerom **s**.
Dotykový bod získame v prieniku priamky **^{2}F^{1}Q**, resp. **^{2}F^{1}Q´** s dotyčnicou **t**, resp. **t´**.

Poznámka: Úlohy o konštrukcii dotyčníc zostrojených z daného vonkajšieho bodu **R** alebo dotyčníc rovnobežných s daným smerom **s** k hyperbole (parabole) sa riešia analogicky ako úloha č.2 a 3. Pre parabolu využijeme namiesto vety 3 a 4 vetu 3´ a 4´.

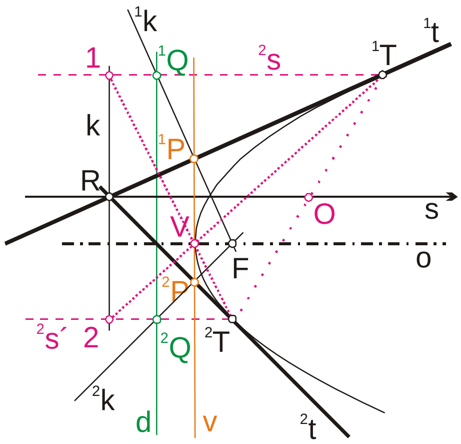
Veľmi často stojíme pred úlohou zostrojiť parabolu, ktorá je daná dvoma dotyčnicami s ich dotykovými bodmi.

Úloha č. 4: Zostrojte parabolu, ak poznáte dotyčnice $^1\mathbf{t}$, $^2\mathbf{t}$ s dotykovými bodmi $^1\mathbf{T}$, $^2\mathbf{T}$.



Obr. 21.

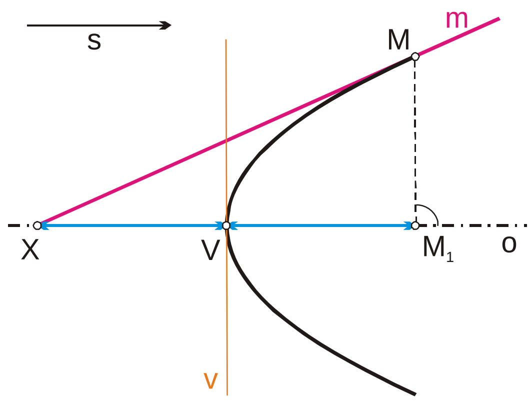
Riešenie: 1) Pre vyhľadanie smeru osi **s** paraboly použijeme vetu 8 (obr.21).
V bodoch $^1\mathbf{T}$ a $^2\mathbf{T}$ zostrojíme sprievodiče $^2\mathbf{s}$, $^2\mathbf{s}'$, ktoré sú rovnobežné s vyhľadaným smerom osi **s** paraboly.
Podľa vety 1 vieme zostrojiť sprievodiče $^1\mathbf{s}$, $^1\mathbf{s}'$ v týchto bodoch.
Sprievodiče $^1\mathbf{s}$, $^1\mathbf{s}'$ sa pretnú v ohnisku **F**, ktorým prechádza os **o** rovnobežne s vyhľadaným smerom **s**.



Obr. 22.

2) Úlohu č.4 môžeme riešiť aj pomocou ***lichobežníkovej metódy*** hľadania vrchola paraboly (obr.22).
Kolmica **k** v bode **R** ($\mathbf{R}={}^1\mathbf{t}\cap{}^2\mathbf{t}$) na smer **s** vyhľadaný podľa vety 8, pretne sprievodiče $^2\mathbf{s}$, $^2\mathbf{s}'$ v bodoch **1** a **2**.
Takto získame lichobežník $\mathbf{1}\,{}^1\mathbf{T}\,{}^2\mathbf{T}\,\mathbf{2}$, ktorého uhlopriečky sa pretnú vo vrchole **V** hľadanej paraboly.
Os **o** prechádza vrcholom **V** rovnobežne s vyhľadaným smerom **s**.
Podľa vety 4´ päty $^1\mathbf{P}$ a $^2\mathbf{P}$ kolmíc $^1\mathbf{k}$ a $^2\mathbf{k}$ zostrojených z ohniska **F** na dotyčnice ležia na vrcholovej dotyčnici **v**, preto ju vieme zostrojiť. Ohnisko **F** je v priesečníku kolmíc $^1\mathbf{k}$, $^2\mathbf{k}$, resp. v priesečníku jednej z nich s osou **o**.
Riadiacu priamku **d**, ktorá je kolmá na os paraboly nájdeme pomocou ohniskovej vlastnosti paraboly ($|\mathbf{Vd}|=|\mathbf{VF}|$) resp. pomocou vety 3´(body $^1\mathbf{Q}$ a $^2\mathbf{Q}$, pre ktoré platí: $|{}^1\mathbf{Q}\,{}^1\mathbf{P}|=|{}^1\mathbf{PF}|$, $|{}^2\mathbf{Q}\,{}^2\mathbf{P}|=|{}^2\mathbf{PF}|$, ležia na riadiacej priamke **d**).

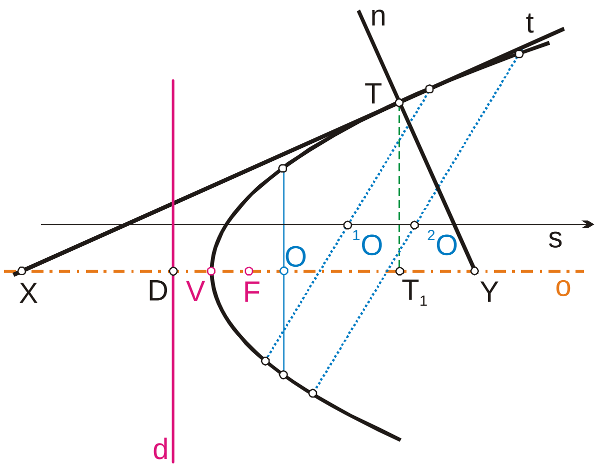
Úloha č. 5: Zostrojte dotyčnicu paraboly v jej danom bode **M**, ak poznáte vrchol **V** a smer **s** osi paraboly.



Obr. 23.

Riešenie: (obr.23)
Na osi **o**, ktorá prechádza bodom **V** a je rovnobežná s daným smerom **s**, nájdeme kolmý priemet $\mathbf{M_1}$ dotykového bodu **M**.
Podľa vety 5 (o subtangente) vieme zostrojiť priesečník **X** osi **o** a hľadanej dotyčnice ako obraz bodu $\mathbf{M_1}$ v stredovej súmernosti podľa bodu **V**.
Priamka **MX** je hľadaná dotyčnica **m** paraboly v danom bode **M**.

Úloha č. 6: Zostrojte vrchol **V**, ohnisko **F** a riadiacu priamku **d** už narysovanej paraboly.



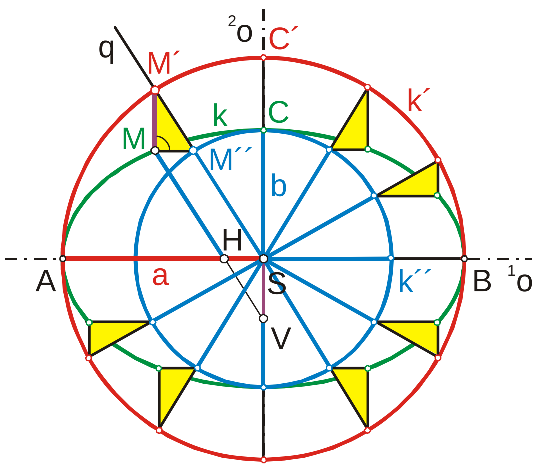
Obr. 24

Riešenie: (obr.24) Zostrojíme dve rovnobežné tetivy, ktorých spojnica stredov ^{1}**O**, ^{2}**O** určí smer **s** osi **o** paraboly.
Os **o** bude prechádzať stredom **O** tetivy kolmej na smer osi a bude rovnobežná s vyhľadaným smerom **s**. Os **o** pretne parabolu v jej vrchole **V**.
Zostrojíme pätu $\mathbf{T_1}$ kolmice z ľubovoľného bodu **T** paraboly na os **o**. Bod **X**, ktorý je obrazom bodu $\mathbf{T_1}$ v stredovej súmernosti podľa vrchola **V** nám umožní zostrojiť dotyčnicu **t**= **XT** – podľa vety 5 (o subtangente).
Normála **n** v bode **T** pretne os **o** v bode **Y**. Podľa vety 7 je ohnisko **F** stredom úsečky **XY**. Pre zostrojenie riadiacej priamky **d** použijeme vetu 6 (o subnormále) - |$\mathbf{T_1}$**Y**|=**p**, teda **p**=|**Fd**|=|**DF**|.

4. Ďalšie vlastnosti a konštrukcie kužeľosečiek

4.1. Elipsa

Zástavková (trojuholníková) konštrukcia elipsy (obr.25)



Obr. 25.

Ak je elipsa daná polohou osí ^{1}**o**, ^{2}**o** a dĺžkami polosí **a**, **b**, môžeme pre konštrukciu jej bodov využiť zástavkovú (trojuholníkovú) konštrukciu, ktorá využíva dvojakú afinitu medzi:

1) elipsou **k** a kružnicou **k´**(**S**;**a**) so smerom afinity ^{2}**o**
2) elipsou **k** a kružnicou **k´´**(**S**;**b**) so smerom afinity ^{1}**o**

Veďme ľubovoľnú polpriamku **q** so začiatkom **S** v strede elipsy a označme **M´** jej priesečník s kružnicou **k´** a **M´´** s kružnicou **k´´**. Spojnica bodov **MM´** musí byť rovnobežná so smerom ^{2}**o** prvej afinity, a súčasne **MM´´** musí byť rovnobežná so smerom ^{1}**o** druhej afinity. Zostrojený bod **M** elipsy je preto vrcholom pravouhlého trojuholníka s preponou **M´M´´**. Popísaným spôsobom môžeme zostrojiť ľubovoľný počet bodov elipsy.

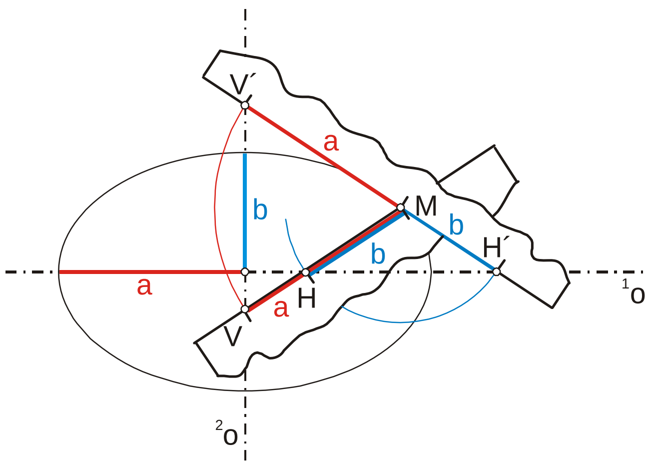
Poznámka č. 1: Vo vrcholoch elipsy sa pravouhlé trojuholníky degenerujú do úsečiek.

Poznámka č. 2: Z rovnobežníka **SM´MV** vyplýva |**MV**|=|**M´S**|=**a** a z rovnobežníka **SM´´MH** vyplýva |**MH**|=|**M´´S**|=**b**, ako je vidieť z obrázku 25.

Uvedené vzťahy sú zdôvodnením nasledujúcej rozdielovej prúžkovej konštrukcie.

Prúžková konštrukcia elipsy (obr.26)

a. ***rozdielová***
b. ***súčtová***



Obr. 26.

Ak je elipsa daná polohou osí ^{1}**o**, ^{2}**o** a dĺžkami polosí **a**, **b**, môžeme pre konštrukciu bodov elipsy využiť tiež rozdielovú alebo súčtovú konštrukciu:

Na ***prúžok*** papiera si vyznačíme bod **M**, od ktorého nanesieme dĺžku **a** (**a**=|**MV**|, alebo **a**=|**MV´**|) a dĺžku **b** (**b**=|**MH**|, alebo **b**=|**MH´**|), čím získame bod **V** (alebo **V´**)a bod **H** (alebo **H´**).

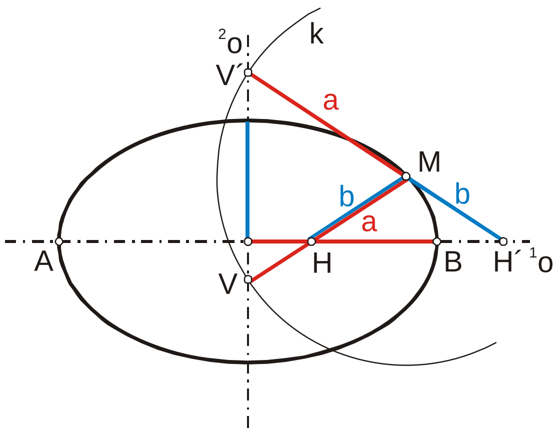
Umiestnime prúžok papiera tak, aby bod **V** bol na vedľajšej osi ^{2}**o** a súčasne bod **H** na hlavnej osi ^{1}**o**; v mieste bodu **M** môžeme vyznačiť bod danej elipsy.

Pohybom prúžka papiera tak, že **H**$\in$^{1}**o** a súčasne **V**$\in$^{2}**o**, s následným vyznačením bodu **M**, získame body elipsy.

a) Ak sme naniesli dĺžky **a** a **b** na tú istú polpriamku so začiatkom **M**, získali sme body **H**,**V** a dĺžku úsečky |**HV**|=**a**–**b**. V takom prípade hovoríme o ***rozdielovej konštrukcii***.
b) Ak sme naniesli dĺžky **a** a **b** na opačné polpriamky so začiatkom **M**, získali sme body **H´**,**V´** a dĺžku úsečky |**H´V´**|=**a**+**b**. V takom prípade hovoríme o ***súčtovej konštrukcii***.(obr.26).

Uvedené konštrukcie bodov elipsy sú princípom mechanického zariadenia na kinematické vytvorenie (rysovanie) elipsy, tzv. elipsografu.

Úloha č. 7: Zostrojte elipsu, ktorá je daná hlavnými vrcholmi **A**, **B** a bodom **M** elipsy.



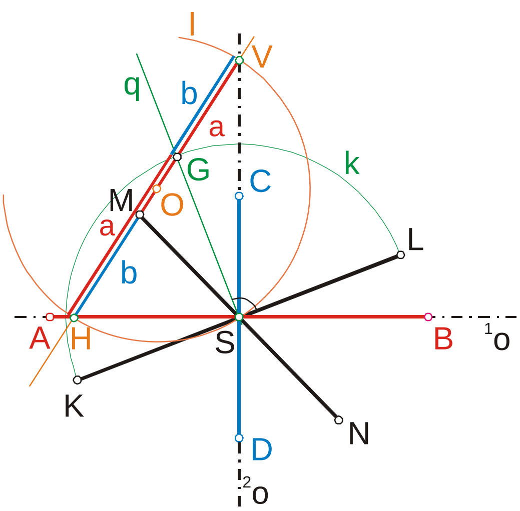
Obr. 27.

Riešenie: (obr.27)
Pri hľadaní dĺžky vedľajšej polosi využijeme průžkovú konštrukciu.
Kružnica **k**(**M**;**a**) pretne vedľajšiu os **²o** v bodoch **V** a **V´**.
Ak spojíme bod **M** elipsy s bodom **V**, získame dĺžku vedľajšej polosi **b** na základe rozdielovej průžkovej konštrukcie.
Spojnica **MV´** súvisí s konštrukciou dĺžky vedľajšej polosi **b** pomocou súčtovej průžkovej konštrukcie.
Ak poznáme hlavné vrcholy elipsy a dĺžku **b**, môžeme pre narysovanie elipsy použiť ľubovoľnú z predchádzajúcich konštrukcií.

Rytzova konštrukcia elipsy

V praxi sa často stretávame s úlohou zostrojiť elipsu, ktorá je daná združenými priemermi. Vzhľadom na vlastnosti združených priemerov ide v skutočnosti o úlohu vpísať elipsu do dotyčnicového rovnobežníka. Hoci zručný technik naškicuje elipsu bez väčších problémov, musí vedieť elipsu narysovať presne. Najvhodnejšií spôsob je osvojiť si ***Rytzovu konštrukciu*** (úloha č.8 – obr.28).

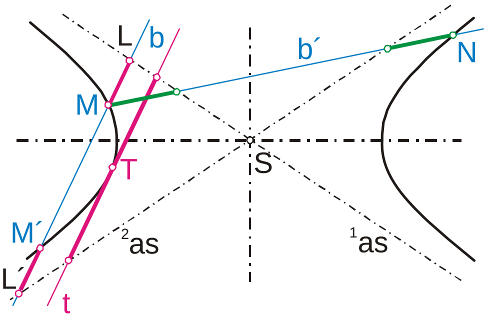
Úloha č. 8: Zostrojte elipsu, ktorá je daná združenými priemermi **KL**, **MN**



Obr. 28.

Riešenie: (obr.28)
Nad jedným priemerom, napr. **KL** opíšeme polkružnicu **k**(**S**;|**SK**|).
Bodom **S** zostrojíme kolmicu **q**, ktorá pretne kružnicu **k** v bode **G**.
Nájdeme stred **O** úsečky **GM** (**M** je bližší z koncových bodov druhého priemeru).
Kružnica **l**(**O**;|**OS**|) pretne priamku **GM** v bode **H** a **V**.
Dĺžka hlavnej polosi **a**=|**VM**|=|**GH**|, dĺžka vedľajšej polosi **b**=|**HM**|=|**GV**|.
Hlavná os elipsy **¹o**=**HS** leží v ostrom uhle daných združených priemerov.
²o=**VS** je vedľajšia os elipsy.

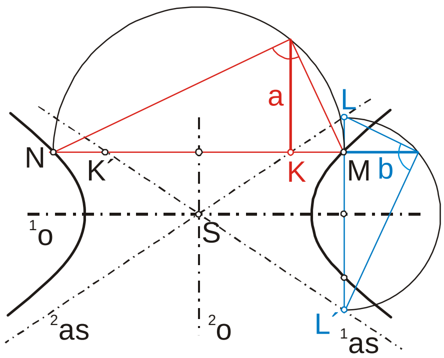
4.2. Hyperbola



Obr. 29.

Veta 9: Dĺžky úsečiek na priamke medzi bodmi hyperboly a priesečníkmi s asymptotami sú rovnaké: |**ML**|=|**M´L´**| (obr.29).

Dôsledok: Dotykový bod **T** dotyčnice **t** rozpoľuje úsečku tejto dotyčnice ohraničenú asymptotami (obr.29).



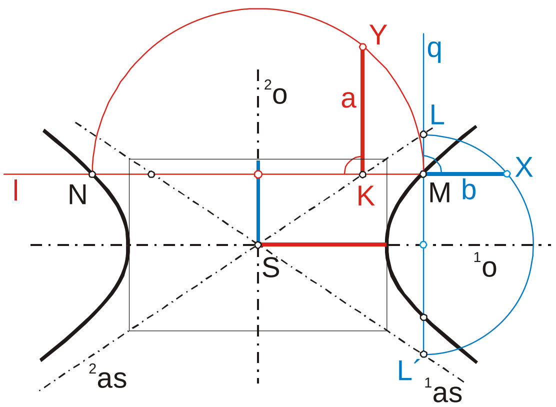
Obr. 30.

Veta 10: Súčin úsečiek na priamke rovnobežnej s hlavnou osou hyperboly od bodu jednej asymptoty po priesečníky tejto priamky s hyperbolou sa rovná obsahu štvorca nad dĺžkou hlavnej polosi, t.j. |**MK**| **.** |**KN**|=**a**^{2}. (obr.30)

Veta 11: Súčin úsečiek na priamke rovnobežnej s vedľajšou osou hyperboly od bodu hyperboly po priesečníky tejto priamky s asymptotami sa rovná obsahu štvorca nad dĺžkou vedľajšej polosi, t.j. |**ML**| **.** |**ML´**|=**b**^{2}. (obr.30)

Z týchto viet vyplýva jednoduchá konštrukcia hyperboly, ktorá je daná asymptotami a bodom hyperboly (úloha č.9), ktorú veľmi často potrebujeme pri riešení úloh rezov kužeľovej plochy a rezov na hyperboloidoch.

Úloha č. 9: Narysujte hyperbolu, ak poznáte asymtoty **^{1}as**, **^{2}as** a bod **M**, ktorý leží na hyperbole



Obr. 31.

Riešenie: (obr.31) Pri riešení použijeme buď vetu 10, alebo vetu 11.
Zostrojíme hlavnú os **^{1}o** ako os toho uhla asymptôt, v ktorom leží bod **M** hľadanej hyperboly. Vedľajšia os **^{2}o** je na hlavnú os **^{1}o** kolmá a prechádza stredom **S**=**^{1}as**$\cap$**^{2}as** hyperboly.
1) Ak použijeme vetu 10, zostrojíme bodom **M** priamku **l**, ktorá je rovnobežná s hlavnou osou **^{1}o** a vyznačíme na nej bod **N** hyperboly (podľa vety 9). Zostrojíme Talesovu kružnicu nad úsečkou **MN**. Kolmica zostrojená v bode **K** pretne Talesovu kružnicu vo vrchole **Y** pravouhlého trojuholníka **NYM**. Z Euklidovej vety o výške trojuholníka získame vzťah |**MK**| **.** |**KN**|=**a**^{2}, teda výška pravouhlého trojuhoníka **NYM** bude dĺžkou hlavnej polosi **a**. Pomocou charakteristického obdĺžnika ľahko zostrojíme dĺžku vedľajšej polosi **b**.
2) Ak použijeme vetu 11, zostrojíme bodom **M** priamku **q**, ktorá je rovnobežná s vedľajšou osou **^{2}o** a priesečníky priamky **q** s asymptotami označíme **L**, **L´**.
Nad úsečkou **LL´** zostrojíme Talesovu kružnicu, ktorá pretne priamku **l** v bode **X**. Z Euklidovej vety o výške trojuholníka získame vzťah |**ML**| **.** |**ML´**|=**b**^{2}, teda výška pravouhlého trojuhoníka **LXL´** bude dĺžkou vedlajšej polosi **b**. Dĺžku **a** hlavnej polosi zostrojíme pomocou charakteristického obdĺžnika.