Poznámka: Integračné množiny (M, M^*) vyjadrujeme vždy ako uzavreté množiny. Dá sa dokázať, že ak sa prostosť, resp. regulárnosť zobrazenia poruší len na časti hranice množiny, pri integrovaní to nie je dôležité.

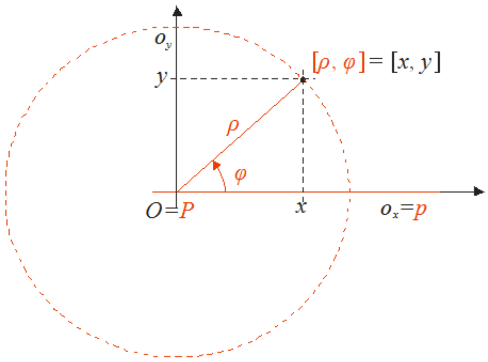
DVOJNÉ integrály v POLÁRNYCH súradniciach

PRAVOUHLÁ súradnicová sústava

O – začiatok súradnicovej sústavy

o_x, o_y – súradnicové osi

$[x, y]$ – ľubovoľný bod



POLÁRNA súradnicová sústava

P – pól

p – polárna os

$[\rho, \varphi]$ – ľubovoľný bod

Transformačné rovnice:

$$M^* = \{[\rho,\varphi] \in E^2\} \to M = \{[x, y] \in E^2\}$$

$$x = \rho\cos\varphi \quad ; \quad \rho \geq 0$$
$$y = \rho\sin\varphi \quad ; \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

$$J(\rho,\varphi) = \rho$$

$$\iint_M f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{M^*} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi$$

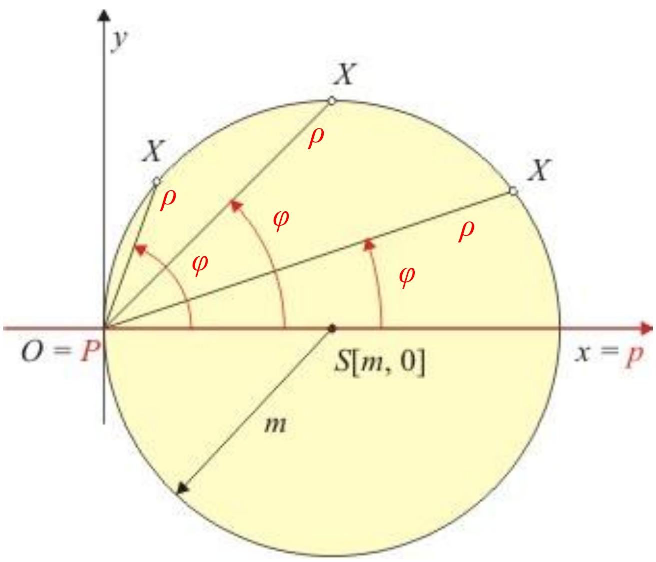
Použitie: Vtedy, keď integrovaná funkcia závisí od (x^2+y^2) alebo $arctg(y/x)$ alebo keď hranica integračnej oblasti obsahuje oblúky kružníc a polpriamky vychádzajúce z počiatku súradnicovej sústavy.

Poznámka: Nech oblasť M tvorí kruh so stredom S a polomerom $r = m$ = konšt.

- Ak pól P <u>je</u> totožný so stredom kruhu S, potom $\rho \in [0, m]$.
- Ak pól P <u>nie je</u> totožný so stredom kruhu S, potom súradnice ρ závisia od uhla φ.

Napr.

$|PX| = \rho$, $\sphericalangle(\overrightarrow{PX}, p) = \varphi$



M: $(x-m)^2 + y^2 \leq m^2$ $\to$ kruh $S[m,0]$, $r = m$

$$M^*: x = \rho\cos\varphi \quad ; \quad 0 \leq \rho \leq 2m\cos\varphi$$
$$y = \rho\sin\varphi \quad ; \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

$$J(\rho,\varphi) = \rho$$

lebo:

$$(x-m)^2 + y^2 \leq m^2$$

$$\downarrow \; x = \rho\cos\varphi$$
$$\downarrow \; y = \rho\sin\varphi$$

$$\rho(\rho - 2m\cos\varphi) \leq 0 \;\to\; \rho \geq 0 \wedge \rho \leq 2m\cos\varphi$$

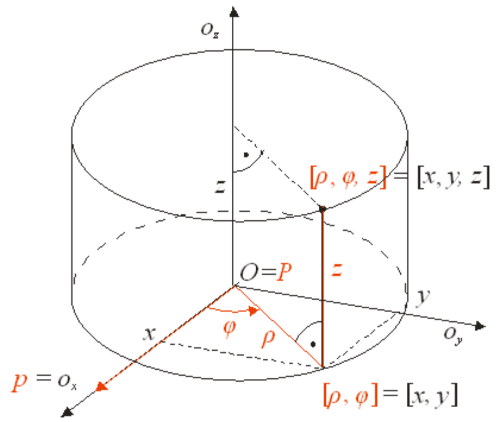
TROJNÉ integrály v CYLINDRICKÝCH súradniciach

PRAVOUHLÁ súradnicová sústava

O – začiatok súradnicovej sústavy

o_x, o_y, o_z – súradnicové osi

[*x*, *y*, *z*] – ľubovoľný bod



CYLINDRICKÁ súradnicová sústava

P – pól

p – polárna os

[*ρ*, *φ*, *z*] – ľubovoľný bod

Transformačné rovnice:

$$M^* = \{[\rho, \varphi, z] \in E^3\} \to M = \{[x, y, z] \in E^3\}$$

$$x = \rho\cos\varphi \quad ; \quad \rho \geq 0$$
$$y = \rho\sin\varphi \quad ; \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$
$$z = z \quad ; \quad z \in R$$

$$J(\rho, \varphi, z) = \rho$$

$$\iiint_M f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{M^*} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\, \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$$

Použitie: Vtedy, keď hranica integračnej oblasti obsahuje kružnice, resp. oblúky kružníc.

TROJNÉ integrály vo SFÉRICKÝCH súradniciach

PRAVOUHLÁ súradnicová sústava

O – začiatok súradnicovej sústavy

o_x, o_y, o_z – súradnicové osi

[*x*, *y*, *z*] – ľubovoľný bod

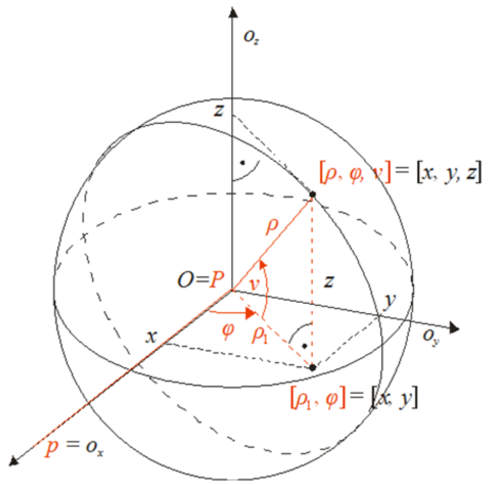
SFÉRICKÁ súradnicová sústava

P – pól

p – polárna os

[*ρ*, *φ*, *υ*] – ľubovoľný bod

ρ_1 – priemet *ρ* do roviny R_{xy}



Transformačné rovnice:

$$M^* = \{[\rho, \varphi, \nu] \in E^3\} \to M = \{[x, y, z] \in E^3\}$$

$$x = \rho\cos\varphi\cos\nu \quad ; \quad \rho \geq 0$$
$$y = \rho\sin\varphi\cos\nu \quad ; \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$
$$z = \rho\sin\nu \quad ; \quad \nu \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$J(\rho, \varphi, \nu) = \rho^2\cos\nu$$

$$\iiint_M f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{M^*} f(\rho\cos\varphi\cos\nu, \rho\sin\varphi\cos\nu, \rho\sin\nu)\, \rho^2\cos\nu\, d\rho\, d\varphi\, d\nu$$

Použitie: Ak množiny, ktoré určujú *M*, sú guľové plochy alebo funkcia *f*(*x*, *y*, *z*) má vyjadrenie súčtu troch kvadrátov, napr. $f(x, y, z) = 1/\left(1 + \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3\right)$.