ANULOID

ÚVOD

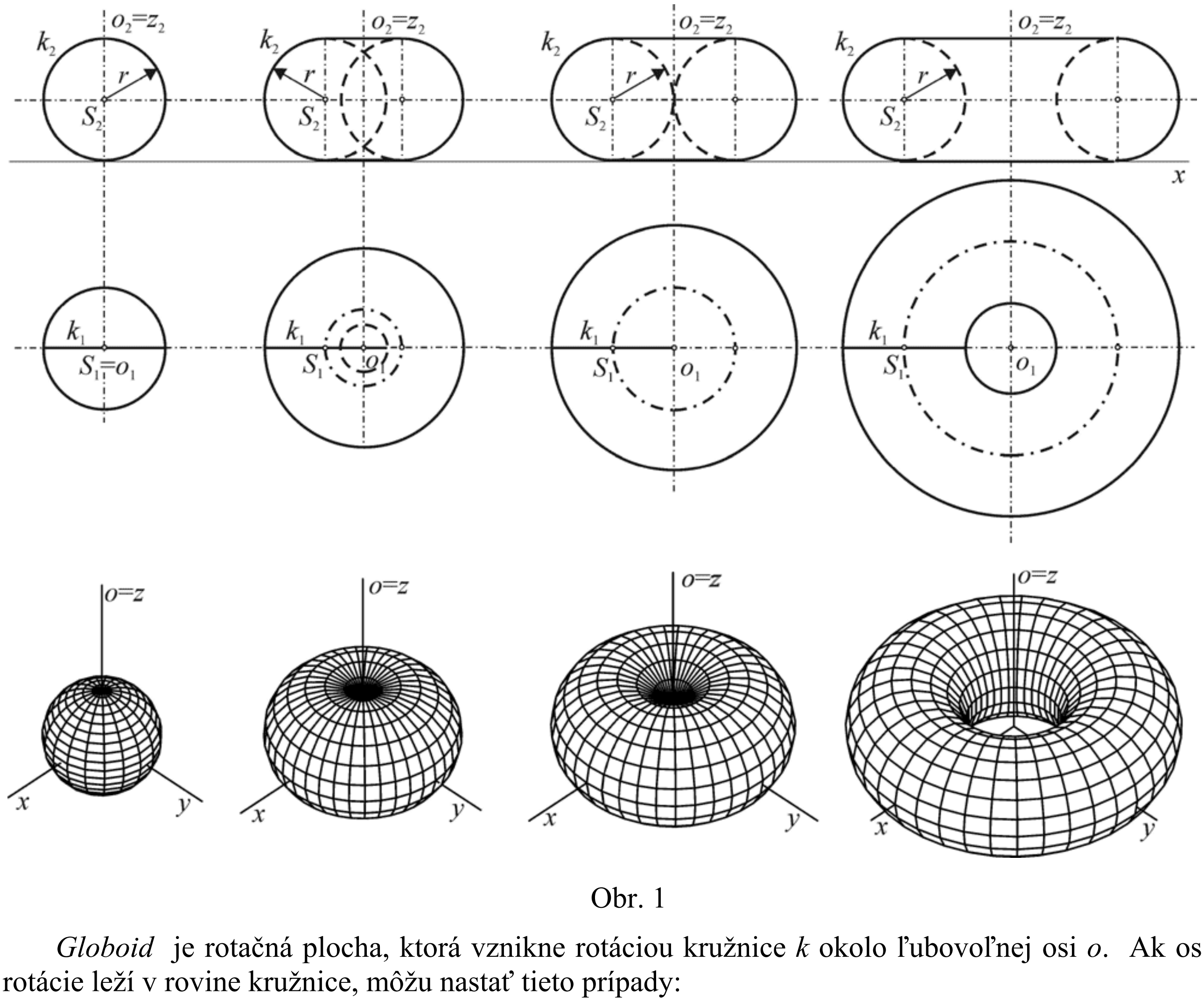
Matematická analýza a deskriptívna (prípadne konštrukčná) geometria sú dva rôzne predmety, ktoré úzko spolu súvisia. Anuloid a guľová plocha sú plochy technickej praxe.V texte sú z geometrického a analytického hľadiska popisované základné situácie, s ktorými sa pri jeho štúdiu môžeme stretnúť.

GEOMETRICKÉ VARIÁCIE NA TÉMU ANULOID

- ***Rotačné plochy***

Vznikajú rotáciou ľubovoľnej čiary (rovinnej alebo priestorovej) – tzv. *tvoriacej čiary* okolo pevnej priamky o – *osi rotácie*. Ak namiesto čiary uvažujeme plochu, potom jej rotáciou okolo priamky o vznikne jednoparametrický systém plôch, ktorého obálka je *rotačná obalová plocha*. Tvoriaca plocha sa obalovej plochy dotýka v čiare - *charakteristike*, ktorá rotačným pohybom vytvorí tú istú obalovú plochu. Napr. rotáciou guľovej plochy (charakteristikou je hlavná kružnica ležiaca v rovine určenej osou o a stredom S guľovej plochy $\boldsymbol{G}(S, r)$) získame obalovú plochu (*plochu rúrovú*).

V ďalšom texte sa budeme zaoberať iba rotačnou plochou, ktorej tvoriaca čiara je kružnica $k(S, r)$.



Obr. 1

Globoid je rotačná plocha, ktorá vznikne rotáciou kružnice k okolo ľubovoľnej osi o. Ak os rotácie leží v rovine kružnice, môžu nastať tieto prípady:

a/ os rotácie prechádza stredom kružnice k – *guľová plocha*
b/ os rotácie neprechádza stredom, ale kružnicu k pretína v dvoch rôznych bodoch - *melonoid*
c/ os rotácie sa dotýka kružnice k v jednom bode (v dvoch súmedzných bodoch) - *axoid*
d/ os rotácie nepretína kružnicu k - *toroid, kruhový prstenec, torus*

Plochy b/, c/, d/ majú spoločný názov – *anuloid* (obr. 1).

Rotáciou stredu S tvoriacej kružnice vznikne kružnica $l(O, R)$, ktorú nazveme *strednou kružnicou*. Jej stred O leží na osi rotácie.

Pri štúdiu vlastností rotačných plôch je výhodné pracovať v pravouhlom karteziánskom súradnicovom systéme $\langle O, x, y, z\rangle$, os rotácie o umiestniť do súradnicovej osi $z = o_z$ a tvoriacu čiaru k do súradnicovej roviny $\boldsymbol{R}_{xz} = \nu$ – nárysne.

- ***Analytické vyjadrenie plochy***

Nech tvoriaca kružnica $k(S, r)$ leží v rovine $\boldsymbol{R}_{xz}$ a pre súradnice jej stredu platí $S = [R, 0, 0]$. Je zrejmé, že parametrické rovnice tejto kružnice majú tvar

$$x(u) = r\cos u + R$$
$$y(u) = 0 \qquad \text{pre } u \in [0, 2\pi] \,.$$
$$z(u) = r\sin u$$

Rotáciou kružnice k okolo osi o_z vznikne anuloid, ktorého analytické vyjadrenie vo vektorovom tvare je:

$$\mathbf{r}(u, v) = \big((r\cos u + R)\cos v, (r\cos u + R)\sin v, r\sin u\big), \quad (u, v) \in [-\alpha, \alpha] \times [0, 2\pi] \,,$$

kde $\alpha = \pi$. Pre guľovú plochu $\alpha = \pi/2$.

S použitím elementárnych metód sa dá ukázať, že súradnice anuloidu vyhovujú vzťahu

$$\left(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2\right)^2 = 4R^2\left(x^2 + y^2\right) .$$

Vidíme, že anuloid je plocha štvrtého stupňa. Špeciálne, ak $R = 0$, dostávame rovnicu guľovej plochy

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \,.$$

- ***Dôležité čiary rotačnej plochy***

Na rotačnej ploche sa nachádzajú dva druhy dôležitých čiar, ktoré sa pretínajú pod pravým uhlom.

a/ *rovnobežkové kružnice, rovnobežky* – sú vytvorené rotáciou jednotlivých bodov tvoriacej kružnice a ležia v rovinách kolmých na os rotácie, ktoré nazývame *normálové rezy*. V prípade anuloidu, rovnobežkovú kružnicu, ktorá má najväčší polomer, nazývame *rovníkovou kružnicou*. Za predpokladu $r < R$, kružnicu, ktorá má najmenší polomer, nazývame *hrdlovou kružnicou*. Rovnobežkové kružnice, ktoré ležia v dotykovej rovine plochy, nazývame *kráterové kružnice* (majú najväčšiu a najmenšiu z-ovú súradnicu plochy).

Ak hľadáme súvislosti medzi uvažovanými plochami, sledujeme ich vznik pomocou geometrického modelovania plochy, ktorú získame rotáciou kružnice k, a venujme pozornosť hrdlovej kružnici a kráterovej kružnici. Vychádzajme z toroidu, na ktorej sa nachádza hrdlová a kráterová kružnica a postupne približujeme kružnicu k ku osi rotácie. Keď os rotácie bude dotyčnicou kružnice k (axoid), z hrdlovej kružnice sa stane bod a kráterové kružnice zostávajú; keď os rotácie bude sečnicou (melonoid), miesto hrdlovej kružnice získame dva rôzne body a kráterové kružnice zostávajú; keď os rotácie bude prechádzať stredom kružnice k (guľová plocha), získame už iba body na póloch – najvyšší a najnižší bod, ktoré sú špeciálnym limitným prípadom hrdlovej i kráterovej kružnice. Rovníkovú kružnicu majú všetky vyššie uvedené plochy, melonoid má 2 rovníkové kružnice.

b/ *meridiány*, *poludníky* –sú to rezy rovinami, ktoré prechádzajú osou rotácie, preto ich nazývame i osovými rezmi. Všetky meridiány rotačnej plochy sú navzájom zhodné. Meridián ležiaci v rovine rovnobežnej s nárysňou *v* nazývame v deskriptívnej geometrii *hlavným meridiánom*. Pojem meridiánu sa v novej literatúre definuje ako rez polrovinou s hraničnou priamkou v osi rotácie, v staršej literatúre je takýto rez pomenovaný ako *polmeridán*. Prikloňme sa k pojmu meridiánu novej literatúry, potom meridián anuloidu je kružnica a meridián guľovej plochy je polkružnica

Každým bodom na rotačnej ploche prechádza práve jedna rovnobežková kružnica a jeden meridián plochy, ktoré zodpovedajú *u-krivkám* a *v-krivkám* na ploche danej parametricky (1). *u-krivky* ($\mathbf{r}(u, v_0)$, v_0 je konštanta) sú meridiány, *v-krivky* ($\mathbf{r}(u_0, v)$, u_0 je konštanta) sú rovnobežkové kružnice.

- ***Vyjadrenie anuloidu v tvare grafu funkcie dvoch premenných***

Aplikáciou základných metód analytickej geometrie v priestore veľmi ľahko ukážeme, že časť anuloidu nad rovinou $\boldsymbol{R}_{xy} = \pi$ (z-ové súradnice všetkých bodov tejto časti plochy sú nezáporné) môžeme z pohľadu matematickej analýzy stotožniť s grafom funkcie dvoch premenných, ktorá má nasledujúce analytické vyjadrenie:

$$f(x,y) = \sqrt{2R\sqrt{x^2+y^2} - x^2 - y^2 - R^2 + r^2} \quad . \tag{2}$$

Poznamenajme, že čitateľ sa môže dopracovať aj k iným, formálne odlišným, avšak správnym vyjadreniam tejto funkcie. Časť anuloidu pod rovinou $\boldsymbol{R}_{xy}$ (z-tové súradnice všetkých bodov tejto časti plochy sú záporné), má úplne analogické vyjadrenie. Odlišnosť je len v použití znamienka „mínus“. Definičný obor funkcie je medzikružie ohraničené rovníkovou a hrdlovou kružnicou t.j.

$$D(f) = \left\{(x,y) : (R-r)^2 \le x^2 + y^2 \le (R+r)^2\right\} .$$

- ***Dotyková rovina, klasifikácia bodov na ploche***

Dotyková – tangenciálna rovina plochy je vytvorená zväzkom dotyčníc ku krivkám prechádzajúcim bodom dotyku *T*. *Bitangenciálna rovina* sa dotýka plochy v dvoch bodoch.
Podľa vzájomnej polohy plochy, dotykovej roviny a ich počtu bodov dotyku *T* rozoznávame rôzne typy bodov na ploche – *singulárne* body (*kónický*, *biplanárny*, *kuspidálny*) a *regulárne* body (*eliptický*, *parabolický* a *hyperbolický*). Guľová plocha a anuloid nemajú singulárne body. Guľová plocha má iba eliptické body. Anuloidy majú všetky tri typy regulárnych bodov. Ak celá plocha leží v jednom polpriestore určenom dotykovou rovinou v bode plochy, dotykový bod *E* bude eliptickým bodom. Ak dotyková rovina v bode *H* plochy bude pretínať plochu, dotykový bod bude hyperbolický a rezová krivka bude mať v tomto bode dvojnásobný bod *H*. Ak dotyková rovina v bode *P* plochy obsahuje čiaru plochy, dotýka sa plochy v tejto čiare (príp. pretína plochu v krivke, ktorá má v bode dotyku bod vratu), bod bude parabolický. Na anuloide parabolické body *P* ležia na kráterových kružniciach. Na toroide existujú také hyperbolické body ${}^1H$, ${}^2H$, v ktorých existuje bitangenciálna rovina – všetky takéto body dotyku ležia na dvoch rovnobežkových kružniciach - viď. obr. 2 - 3.

V konštrukčných úlohách dotykovú rovinu v bode *T* zostrojíme pomocou dotyčníc zostrojených ku meridiánu a rovnobežkovej kružnici v danom bode *T*, pretože obe krivky sú kružnice a konštrukcia dotyčníc k nim je najjednoduchšia. Pri konštrukcii využívame, že všetky dotyčnice k meridiánom v bodoch jednej rovnobežkovej kružnice vytvárajú (obr 4):

a/ *dotykovú - dotyčnicovú (rotačnú) kužeľovú plochu s osou rotácie o* – okrem rovníkovej, hrdlovej a kráterových kružníc

b/ *dotykovú - dotyčnicovú (rotačnú) valcovú plochu s osou rotácie o* v bodoch rovníkovej a hrdlovej kružnice

c/ *dotykovú – dotyčnicovú rovinu* v bodoch kráterovej kružnice [4].

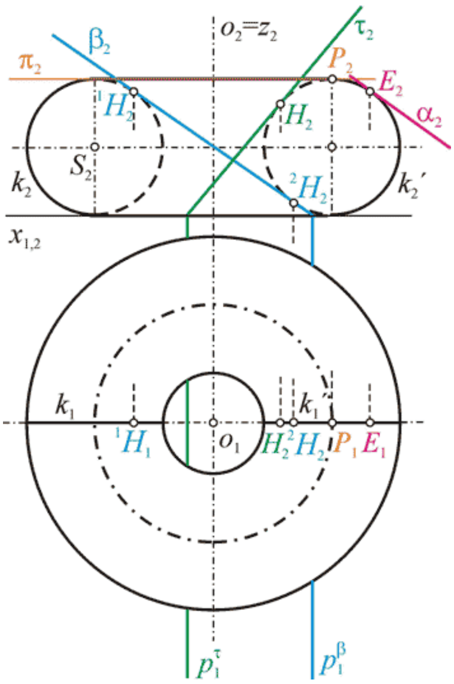
Ako príklad uveďme jednoduchú situáciu súvisiacu s guľovou plochou.

Guľová plocha má iba regulárne body a teda v každom bode má dotykovú rovinu. Ak však zvolíme za bod dotyku pól – najvyšší alebo najnižší bod, pre študenta dostupný matematický aparát nám nedovolí zistiť rovnicu dotykovej roviny v tomto bode a pritom geometrickou úvahou rovnicu získame aj bez výpočtu.

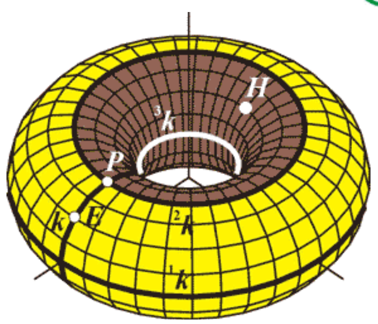
Zvoľme si v parametrických rovniciach (1) bod $u_0 = -\dfrac{\pi}{2}, \quad v_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

Smerový vektor dotyčnice k u-krivke, či v-krivke v zvolenom bode $\mathbf{r}(u_0,v_0)$ je pre obe dotyčnice nulový vektor $\mathbf{r_u}(u_0,v_0) = \mathbf{r}_v(u_0,v_0) = [0,\ 0,\ 0]$ – teda podľa kritéria bod $\mathbf{r}(u_0,v_0)$ nie je regulárny bod plochy a nedá sa v ňom určiť dotyková rovina. V skutočnosti však existuje , stačí sa lepšie prizrieť guľovej ploche:

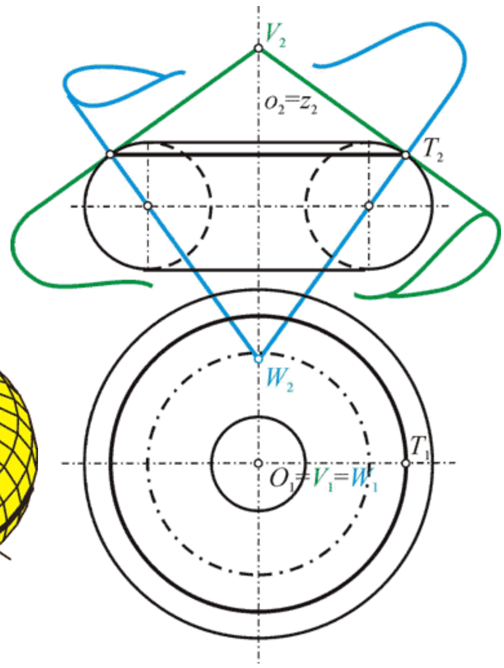
$z + r = 0$, pre bod dotyku $M = [0,\ 0,\ -r]$.



Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4

- ***Normála plochy***

Normála plochy v bode T je priamka kolmá na dotykovú rovinu. U guľovej plochy a anuloidu je totožná s normálou tej kružnice – meridiánu, ktorá prechádza bodom *T*. Podobne ako pri dotyčniciach aj normály ku ploche v bodoch jednej rovnobežkovej kružnice vytvárajú (obr. 4):

a/ *normálovú (rotačnú) kužeľovú plochu s osou rotácie o* - okrem rovníkovej, hrdlovej a kráterových kružníc

b/ *normálovú rovinu* v bodoch rovníkovej a hrdlovej kružnice

c/ *normálovú valcovú plochu* v bodoch kráterových kružníc.

Rovinné rezy plochy

Rezom guľovej plochy akoukoľvek rovinou je *kružnica* (*krivka druhého stupňa*), v limitnom prípade bod. Rovinným rezom anuloidu je *krivka štvrtého stupňa*.

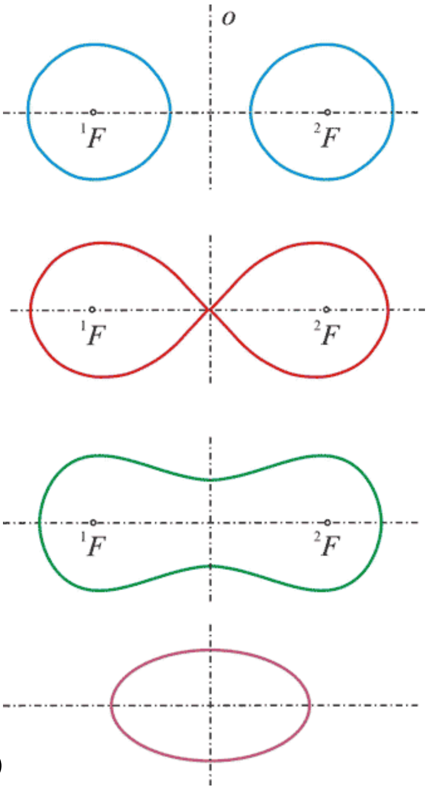
Rezy anuloidu rovinami rovnobežnými s osou rotácie sa nazývajú *spirické krivky Perseusové* (podľa geometra Persea, ktorý ich okolo roku 130 pred Kr. prvýkrát študoval, [3]). Majú buď jednu alebo dve vetvy, v prípade osového rezu sú to dve zhodné kružnice – meridián [3], (alebo podľa [6] dva polmeridiány). Špeciálnym typom spirických kriviek sú *Cassiniho krivky* (*ovály*). Vznikajú rezom roviny rovnobežnej s osou o, ktorej vzdialenosť od osi rotácie je rovná polomeru r rotujúcej kružnice [6]. Body týchto kriviek majú od dvoch pevných bodov F_1, F_2 (tzv. ohnísk) konštantný súčin vzdialeností rovný $2Rr$ ([1], str.125). Body F_1, F_2 sú kolmé priemety stredov meridiánu ležiacich v rovine rovnobežnej s rezovou rovinou do rezovej roviny, r je polomer meridiánovej kružnice a súčasne vzdialenosti rezovej roviny od osi o, R je polomer strednej kružnice [3]. Tvar *Cassiniho oválov* je závislý od pomeru veľkostí R a r (obr. 5 - 7):

a/ $r < \frac{R}{2}$ - rezom sú *dva ovály*

b/ $r = \frac{R}{2}$ - rezom je *Bernoulliho lemniskáta*

c/ $\frac{R}{2} < r < R$ - rezom je *ovál s driekom*

d/ $0 < R < r$ - rezom je *elipsovitý ovál* (Ak $R = 0$ je to prípad rezu guľovej plochy, rez sa stáva bodom.)



Obr. 5

Pri reze toroidu všeobecnou rovinou môže mať rezová čiara jednu alebo dve časti. Ak režeme toroid dotykovou rovinou τ v *hyperbolickom bode H* plochy, rezová krivka má jeden *uzlový bod* (*dvojnásobný bod H*, krivka pretína samu seba), ak režeme *bitangenciálnou rovinou β*, rezová krivka sa rozpadá na dve *loxodromické kružnice* [2] (obr. 8).

- ***Bernoulliho lemniskáta***

Je to jeden z typov Cassiniho kriviek a vzniká rezom roviny, ktorá je súčasne dotykovou rovinou v bode hrdlovej kružnice toroidu, pričom hrdlová kružnica má rovnaký polomer ako je polomer rotujúcej – tvoriacej kružnice k (t.j. prípad b/). Dosadenie do všeobecnej rovnice anuloidu a jej úprava nám potvrdia predpokladaný tvar rovinného rezu.

Pre body M rezovej krivky platí : $F_1M \,.\, F_2M = R^2$.

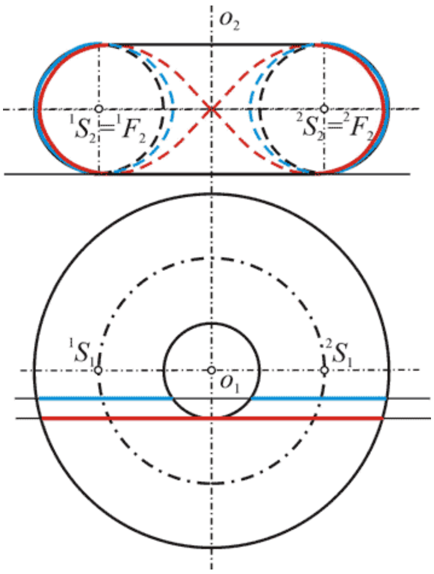
Do všeobecnej rovnice anuloidu dosadíme podmienky, t.j. vzdialenosť rezovej roviny od osi rotácie: $y = r$, a vzťah medzi R, r:

$$r = \frac{R}{2} \ ,$$

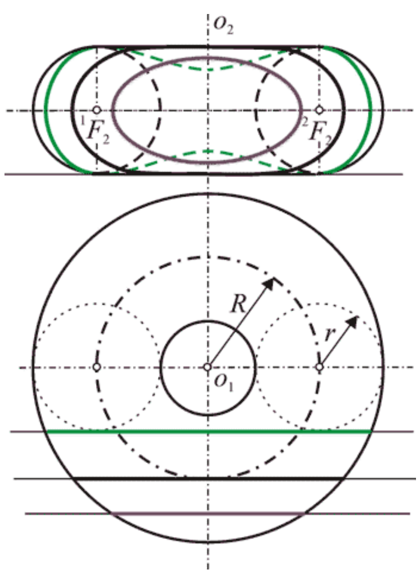
po úprave dostaneme:

$$\left(x^2 + z^2\right)^2 - 2R^2\left(x^2 - z^2\right) = 0 \, ,$$

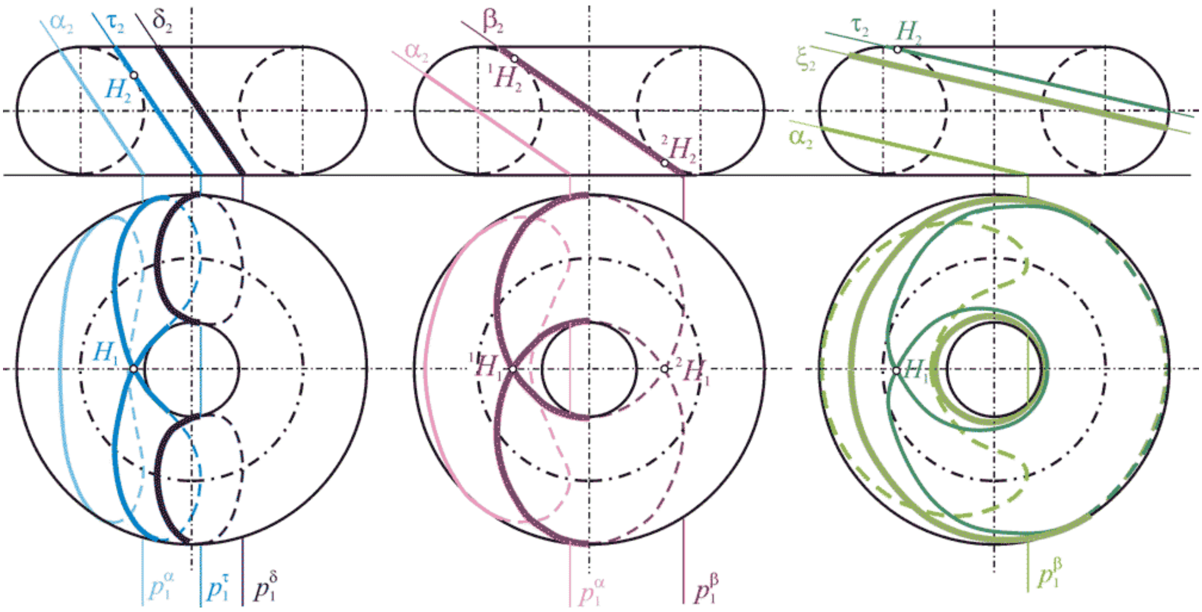
čo je rovnica Bernoulliho lemniskáty.



Obr. 6



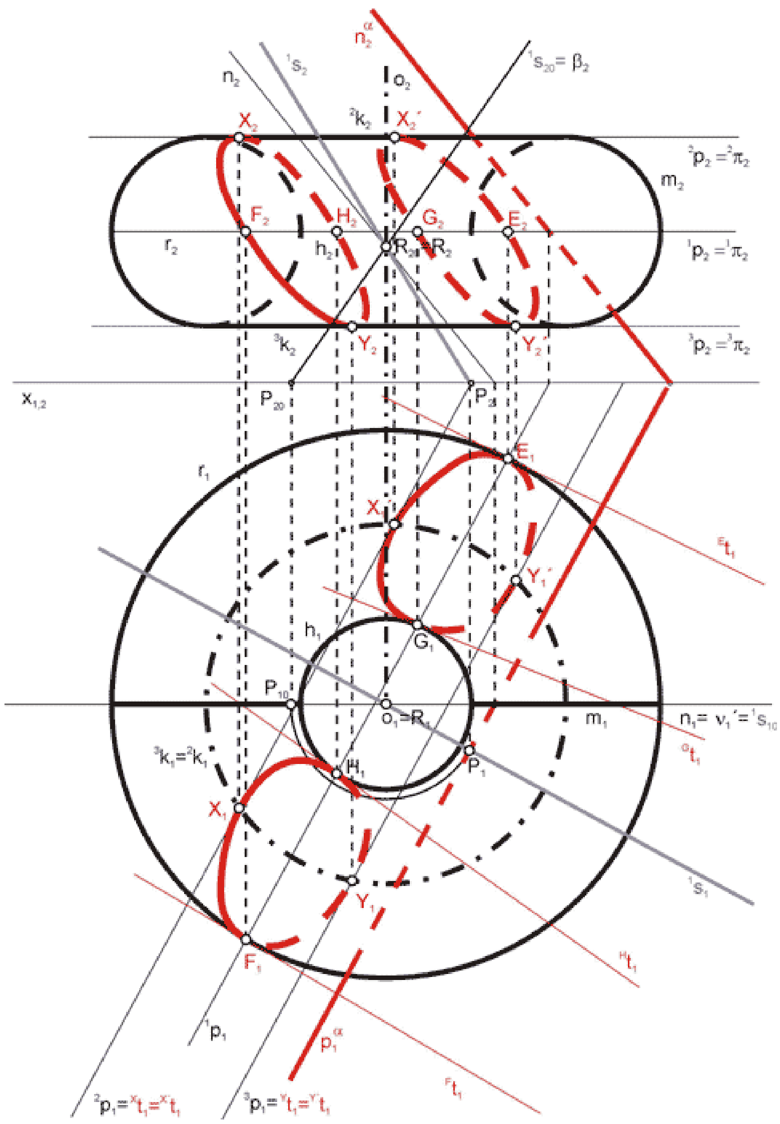
Obr. 7



Obr. 8

- ***Rez všeobecnou rovinou***

Kým začneme hľadať body rezu, urobíme klasifikáciu rezu otočením roviny rezu do roviny hlavného meridiánu pomocou spádovej priamky 1. osnovy – ${}^1s$, aby sme vedeli o aký typ rezu (viď obr 8) pôjde:



Obr. 9

Nech spádová priamka ^1s je určená jej priesečníkom s pôdorysňou (bod P) a s osou rotácie o (bod R) - $^1s = PR$. Spádovú priamku otočíme okolo osi o do roviny hlavného meridiánu pomocou bodov P a R - $^1s = P_0R_0$. (Bod R hľadáme napr. pomocou hlavnej priamky n 2. osnovy)

Ďalšie body rezu zostrojíme pomocou rovín $^i\pi$ rovnobežných s pôdorysňou. Rovina $^i\pi$ ležiaca v páse ohraničenom zdanlivým obrysom anuloidu pretne anuloid v jednej, alebo dvoch rovnobežkových kružniciach; rovinu rezu pretne v hlavnej priamke ^ip. Pretože kružnice a hlavná priamka ležia v jednej rovine, ich vzájomný prienik (ak existuje) sú bodmi rezu anuloidu. [Viď obr.10:

$\pi' \cap \boldsymbol{A} = \{k, k'\}$

$\pi' \cap \boldsymbol{\alpha} = p$

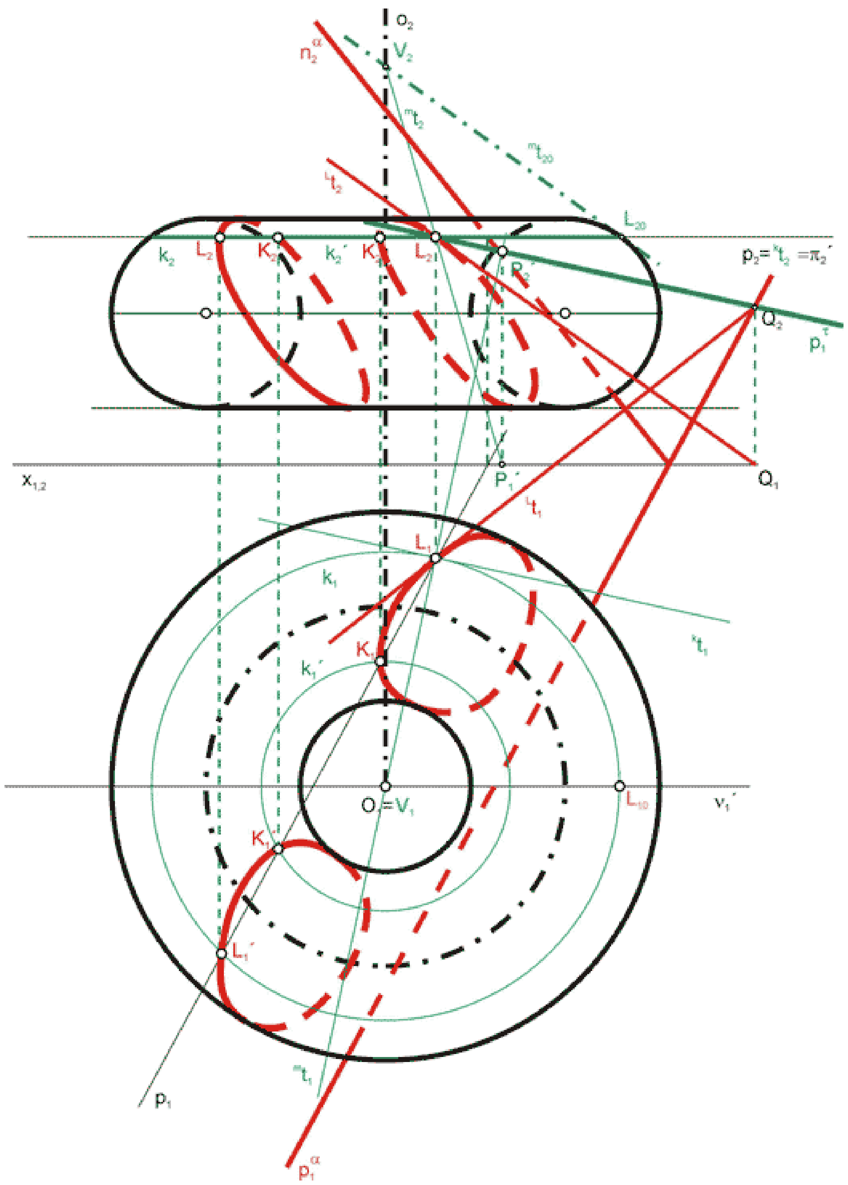
$p \cap k = \{L, L'\}$

$p \cap k' = \{K, K'\}$;

body rezovej čiary sú body K, K', L, L']

Je dôležité nájsť najvyšší a najnižší bod rezu. Tieto body ležia v rovine $^i\pi$, ktorá prechádza priesečníkmi otočenej spádovej priamky $^1s_0$ a hlavného meridiánu, ak existujú. Ak neexistujú, roviny $^i\pi$ prekladáme najvyššími bodmi, resp. najnižšími bodmi anuloidu, sú to parabolické body anuloidu. V našom prípade (obr. 9) rovina $^2\pi$ a $^3\pi$ určuje pás, v ktorom prekladáme pomocné roviny $^i\pi$. Pomocou roviny $^2\pi$ určíme body X, X' a pomocou roviny $^3\pi$ určíme body Y, Y', ktoré sú najvyššími a najnižšími bodmi rezovej krivky. Hlavná priamka ^2p ($^2p \subset {}^2\pi \wedge {}^2p \subset \alpha$) je dotyčnicou rezovej čiary v bode X a X'; hlavná priamka ^3p ($^3p \subset {}^3\pi \wedge {}^3p \subset \alpha$) je dotyčnicou rezovej čiary v bode Y a Y'.

Ďalšie dôležité body rezu ležia na hrdlovej a rovníkovej kružnici, v ktorých sa mení viditeľnosť v pôdoryse. Nájdeme ich pomocou roviny $^1\pi$. Na obr. 9 sú to body G, H na hrdlovej kružnici a body E, F na rovníkovej kružnici. Dotyčnice (^Et, ^Ft) rovníkovej a (^Gt, ^Ht) hrdlovej kružnice v bodoch rezovej čiary sú totožné s dotyčnicami k rezovej čiare v týchto bodoch.



Obr. 10

Dotyčnicu vo všeobecnom bode L (obr. 10) nájdeme pomocou dotykovej roviny τ, ktorá je určená dotyčnicou ${}^{k}t$ rovnobežkovej kružnice k prechádzajúcej bodom L a dotyčnicou ${}^{m}t$ meridiánu prechádzajúceho bodom L. Nárys dotyčnice ${}^{m}t$ hľadáme pomocou dotykovej kužeľovej plochy dotyčníc: bod L otočíme okolo osi o do roviny hlavného meridiánu. V bode L_0 zostrojíme obrysovú tvoriacu priamku dotykovej kužeľovej plochy, čo je dotyčnica ${}^{m}t_0$ k hlavnému meridiánu. Vrchol dotykovej plochy je priesečník dotyčnice ${}^{m}t_0$ a osi rotácie o, dotyčnica k meridiánu v bode L je ${}^{m}t = LV$.

Spoločný bod dotykovej roviny a rezovej roviny je napr. bod Q, ktorý je priesečníkom pôdorysných stôp rovín τ a α, spolu s bodom L určí dotyčnicu ${}^{L}t$ (${}^{L}t = LQ$) k rezovej čiare.

Parabolické body anuloidu, ktoré sú bodmi rezovej čiary a ležia pred rovinou hlavného meridiánu (X a Y), sú bodmi, v ktorých sa mení viditeľnosť v náryse. V náryse sú viditeľné iba eliptické body rezovej čiary, ktoré ležia pred rovinou hlavného meridiánu.

- ***Presečník priamky s anuloidom***

Priesečníky priamky s plochou hľadáme tak, že priamkou preložíme čo najvhodnejšiu rovinu. V našom prípade je to rovina kolmá na nárysňu (obr. 8). Priesečníky priamky s plochou sú priesečníky priamky s rezovou čiarou vhodne zvolenej roviny.

Literatúra:

[1] BRONŠTEJN, I. N., SEMENĎAJEV, K. A. *Príručka matematiky*. Bratislava: SVTL, 1964.
[2] GALLO, O., PALUCH, V. *Deskriptívna geometria II*. Košice: FS VŠT, 1963. s.93 – 97.
[3] KADEŘÁVEK, F., KLÍMA, J., KOUNOVSKÝ, J. *Deskriptivní geometrie II.* Praha: Nakladatelství ČSAV, 1954. s. 587 – 599.
[4] MEDEK, V., ZÁMOŽÍK, J. *Konštruktívna geometria pre technikov.* Bratislava: Alfa, 1978.

[5] SENKO, E. *Deskriptívna geometria*. Zvolen: DF VŠLD, 1971. s. 324 – 329.
[6] URBAN, A. *Deskriptívní geometrie II*. Praha: SNTL / SVTL, 1967. s. 113 –115.
[7] VELICHOVÁ, D. *Konštručná geometria*, Bratislava: ES STU, 2003.
[8] FEYNMAN, R., LEIGHTON, R., SANDS, M. *Feynmanovy přednášky z fyziky 1. Časť.* Praha: Nakladateľstvo FRAGMENT, 2000.

Autori textu:
SZARKOVÁ Dagmar, Katedra matematiky SjF STU v Bratislave
KOREŇOVÁ Božena, Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie DF TU vo Zvoleni