LINEÁRNÍ TRANSFORMACE V ROVINĚ

Kamil Maleček[1], **Dagmar Szarková**[2]

[1]*FSv ČVUT Praha, Thákurova 7, 166 29 Praha 6, ČR,*
e-mail: kamil@mat.fsv.cvut.cz

[2]*SjF STU Bratislava, Nám. Slobody 17, 812 31 Bratislava, SR,*
e-mail: szarkova@sjf.stuba.sk

Abstrakt
V příspěvku je popsaný geometrický způsob vytváření lineárních transformací v rovině pomocí další roviny a složení dvou lineárních promítání. Jsou zde odvozeny vlastnosti transformací a jejich matematický popis. V závěru je položeno několik otázek, kterými se případní zájemci mohou zabývat.

1. Úvod

Ukážeme způsob jak geometricky tvořit lineární transformace v rovině π chápané jako rozšířenou euklidovskou rovinu ${}_\infty\boldsymbol{E}^2$, která je vnořena do rozšířeného euklidovského prostoru ${}_\infty\boldsymbol{E}^3$. K vytvoření transformací užijeme další roviny $\kappa \subset {}_\infty\boldsymbol{E}^3$, $\kappa \neq \pi$, a složení dvou lineárních promítáni f_1 a f_2.

Z vlastností složení obou promítání odvodíme některé vlastnosti transformací a pomocí zvolené soustavy souřadnic odvodíme analytické vyjádření transformací v rovině π.

2. Geometrický způsob tvorby transformací

V prostoru mějme dánu rovinu π. Dále zvolme v prostoru rovinu κ a dvě různá lineární promítání f_1 a f_2. Nechť X je libovolný bod roviny π. Jeho obraz, bod $X' \in \pi$, sestrojíme takto:

a) Sestrojíme bod $\overline{X}$, který je průmětem bodu X do roviny κ v promítání f_1, tedy $\overline{X} = f_1(X)$.

b) Bod X' je průmětem bodu $\overline{X}$ do roviny π v promítání f_2, tedy $X' = f_2(\overline{X})$.

Označíme-li f výslednou transformaci v rovině π, ve které $X \to X'$, pak
$X' = f_2 \circ f_1(X)$.

3. Klasifikace transformací

Lineární promítání, které užijeme při tvorbě transformací, bude rovnoběžné a středové promítání. Pak jsou tři možnosti jak volit promítání f_1 a f_2 :

i) obě promítání jsou rovnoběžná promítání,
ii) jedno promítání je rovnoběžné, druhé je středové promítání,
iii) obě promítání jsou středová promítání .

Rovinu κ můžeme zvolit tak, aby byla buď rovnoběžná nebo různoběžná s rovinou π.

Uvedená volba obou promítání a polohy roviny κ vzhledem k rovině π umožňuje vytvářet různé transformace.

4. Vlastnosti transformací

Z geometrického způsobu vytvoření transformací je zřejmé, že transformace jsou lineární, tedy obrazem přímky je přímka. Uvedeme další vlastnosti transformací.

Samodružné body

Samodružné body transformace v rovině π jsou dvojího druhu:

S1) Jsou to body průsečnice o roviny π a roviny κ.
S2) Je to průsečík S společné promítací přímky promítání f_1 a f_2 s rovinou π.

Samodružné přímky

Bodově samodružná přímka je přímka o. Další samodružné přímky, už nikoli bodově, jsou přímky, které mají společné promítací roviny v obou promítání. To znamená, že přímky, které procházejí samodružným bodem S, jsou samodružné.

Samodružné směry

Samodružný směr je dán směrovým vektorem přímky, která se zobrazí na přímku rovnoběžnou. Protože průsečík obrazu a vzoru přímky je bod na přímce o, tak v případě, že o je vlastní přímka, její směrový vektor určuje samodružný směr. Jestliže samodružný bod S je nevlastní, pak jeho směr je samodružným směrem. Pokud o je nevlastní přímka, tedy $\kappa \,//\, \pi$, pak každý směr je samodružný.

V transformaci tak mohou nastat tyto možnosti:

- všechny směry jsou samodružné, jestliže přímka o je nevlastní,
- jeden směr je samodružný, jestliže přímka o i bod S jsou vlastní, a nebo S je nevlastní bod přímky o,
- dva směry jsou samodružné, jestliže přímka o je vlastní, bod S je nevlastní a neleží na přímce o.

Uvedené vlastnosti umožňují klasifikovat transformace podle počtu samodružných bodů, přímek a směrů.

Základní vlastnosti transformací:

V1) Spojnice bodu X a jeho obrazu X' (vyjma samodružných bodů) je přímka, která prochází samodružným bodem S.

Důvodem je, že promítací přímky obou promítání, které užíváme při konstrukci obrazu X' bodu X, tvoří rovinu, ve které leží společná promítací přímka obou promítání.

V2) Průsečík přímky p a jejího obrazu p' (vyjma samodružných přímek) je bod na samodružné přímce o .

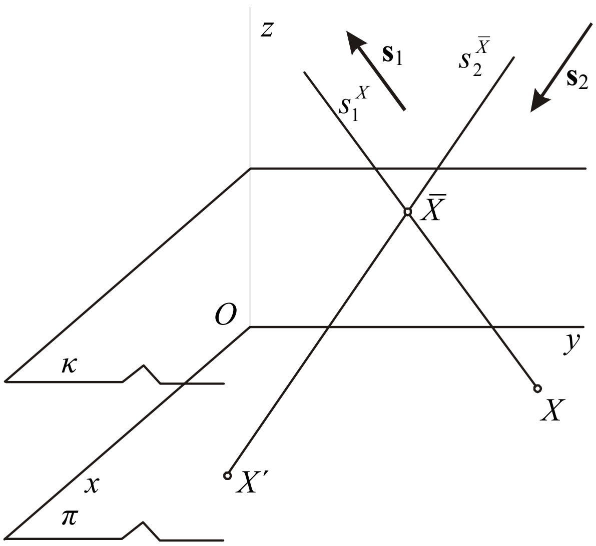
Stereometrické zdůvodnění je zřejmé.

5. Klasifikace transformací a jejich matematický popis

Nyní uvedeme klasifikaci transformací a odvodíme jejich analytické vyjádření.

I. Rovina κ je rovnoběžná s rovinou π

a) f_1 a f_2 jsou rovnoběžná promítání zadaná vektory $\mathbf{s}_1$ a $\mathbf{s}_2$ promítacích přímek, $\mathbf{s}_1$ a $\mathbf{s}_2$ nejsou vektory ze zaměření roviny π .



Označme:

$$X = [x, y, 0] \to X' = [x', y', 0]$$

$$\mathbf{s}_1 = (a_1, b_1, c_1),$$

$$\mathbf{s}_2 = (a_2, b_2, c_2)$$

$$\kappa:\ z = \delta$$

Obr. 1.

Konstrukci bodu X', který je obrazem zvoleného bodu X vidíme na obr.1, na kterém rovněž vidíme volbu kartézské soustavy souřadnic $\langle O, x, y, z\rangle$.

Odvodíme matematický popis transformace.
Promítací přímka s_1^X je dána bodovou funkcí

$$X(t) = [x + t\, a_1,\ y + t\, b_1,\ t\, c_1], \quad t \in \boldsymbol{R}.$$

Bod $\overline{X} = \left[x + \dfrac{\delta\, a_1}{c_1},\ y + \dfrac{\delta\, b_1}{c_1},\ \delta \right]$.

Promítací přímka s_2^X je dána bodovou funkcí

$$\overline{X}(u) = \left[x + \frac{\delta\, a_1}{c_1} + u\, a_2,\ y + \frac{\delta\, b_1}{c_1} + u\, b_2,\ \delta + u\, c_2 \right], \quad u \in \boldsymbol{R}.$$

Bod $X' = \left[x + \dfrac{\delta\, a_1}{c_1} - \dfrac{\delta\, a_2}{c_2},\ y + \dfrac{\delta\, b_1}{c_1} - \dfrac{\delta\, b_2}{c_2},\ 0 \right]$.

Transformace má analytické vyjádření

$$x' = x + \frac{\delta\, a_1}{c_1} - \frac{\delta\, a_2}{c_2} \ ,$$
$$y' = y + \frac{\delta\, b_1}{c_1} - \frac{\delta\, b_2}{c_2} \ . \tag{1}$$

Označíme-li

$$m = \delta\left(\frac{a_1}{c_1} - \frac{a_2}{c_2}\right), \quad n = \delta\left(\frac{b_1}{c_1} - \frac{b_2}{c_2}\right), \tag{2}$$

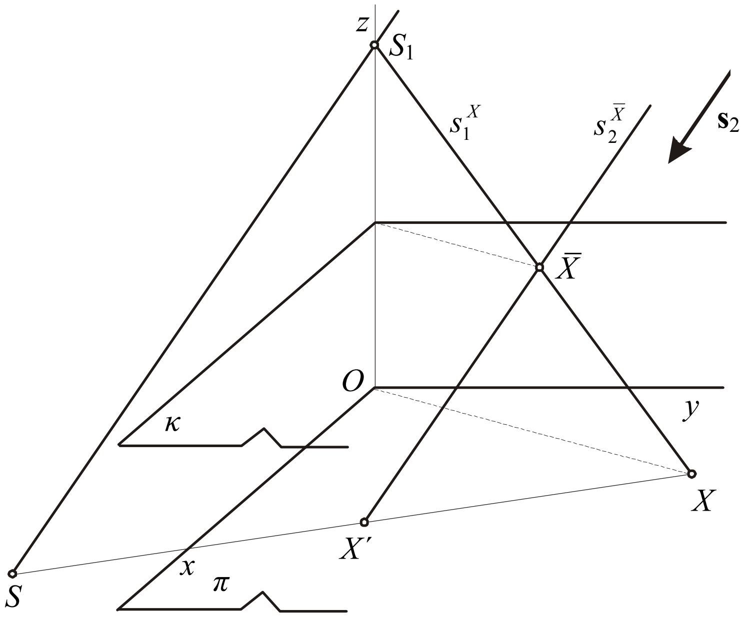
pak rovnice (1) můžeme psát ve tvaru

$$x' = x + m\ ,$$
$$y' = y + n\ , \tag{3}$$

a to je analytické vyjádření translace v rovině π .

Poznámka 1: Nechť translace je dána rovnicemi (3). Ptejme se jak musíme zvolit rovinu κ a vektory $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$, abychom dostali translaci (3) dříve popsaným geometrickým způsobem. Jedna z možností je zvolit rovinu κ , vektor $\mathbf{s}_1$, ale potom vektor $\mathbf{s}_2$ už je dán. Souvisí to s rovnicemi (2) , které jsou nelineární soustavou dvou rovnic pro sedm neznámých. Vektor $\mathbf{s}_2$ je totiž určen až na nenulový násobek.

b) f_1 je středové promítání dané středem S_1 a f_2 je rovnoběžné promítání dané vektorem $\mathbf{s}_2$, $S_1 \notin \pi \wedge S_1 \notin \kappa$, $\mathbf{s}_2$ není vektorem ze zaměření roviny π .



Označme:

$X = [x, y, 0] \rightarrow X' = [x', y', 0]$

$S_1 = [0,0,c_1]$

$\mathbf{s}_2 = (a_2,b_2,c_2)$

$\kappa: \ z = \delta$

Obr. 2.

Na obr.2 jsme kromě konstrukce bodu X' sestrojili bod S , který je samodružným bodem transformace. Speciální volba bodu S_1 na ose z nic nezmění na vlastnostech transformace.

Stejným způsobem jako v předchozím odstavci odvodíme analytické vyjádření transformace:

$$x' = \frac{c_1 - \delta}{c_1} x - \frac{\delta\, a_2}{c_2} \;, \qquad y' = \frac{c_1 - \delta}{c_1} y - \frac{\delta\, b_2}{c_2} \;. \tag{4}$$

Označíme-li

$$k = \frac{c_1 - \delta}{c_1}\,, \quad m = -\frac{\delta\, a_2}{c_2}\,, \quad n = -\frac{\delta\, b_2}{c_2}\,, \tag{5}$$

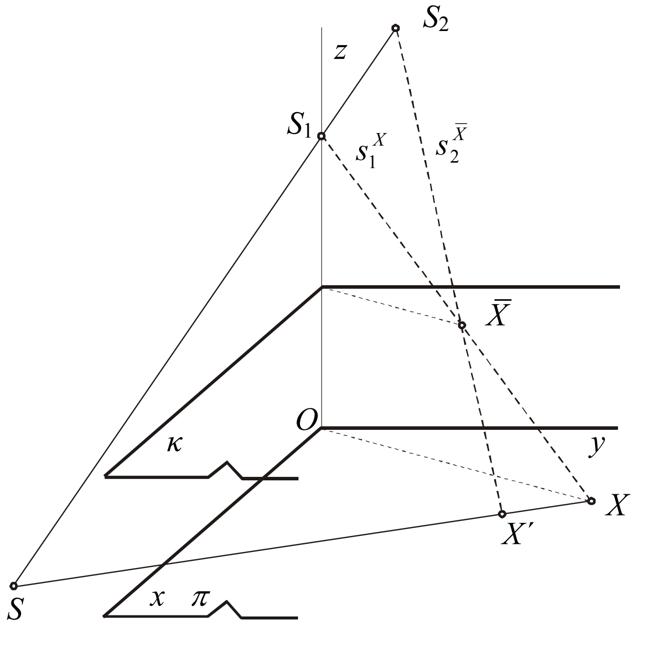
pak rovnice (4) můžeme psát ve tvaru

$$x' = kx + m\,, \qquad y' = ky + n\,, \tag{6}$$

a to je analytické vyjádření stejnolehlosti v rovině π.

Poznámka 2: I v tomto případě si můžeme položit stejnou otázku jako v poznámce 1.

c) f_1 a f_2 jsou středová promítání daná středy S_1 a S_2, které neleží v rovinách π a κ.



Obr. 3.

Označme:

$X = [x, y, 0] \rightarrow X' = [x', y', 0]$

$S_1 = [0, 0, c_1]$

$S_2 = [a_2, b_2, c_2]$

$\kappa: \ z = \delta$.

Transformace má analytické vyjádření

$$x' = \frac{c_2 (c_1 - \delta)}{c_1 (c_2 - \delta)} x - \frac{\delta\, a_2}{c_2 - \delta} \;, \qquad y' = \frac{c_2 (c_1 - \delta)}{c_1 (c_2 - \delta)} y - \frac{\delta\, b_2}{c_2 - \delta} \;. \tag{7}$$

Označíme-li

$$k = \frac{c_2(c_1-\delta)}{c_1(c_2-\delta)}\,, \quad m = -\frac{\delta\, a_2}{c_2-\delta}\,, \quad n = -\frac{\delta\, b_2}{c_2-\delta}\,,$$

pak rovnice (7) můžeme přepsat ve tvaru (6). Mohou nastat dva případy:

i) $c_1 \neq c_2$, pak transformace je stejnolehlost (viz obr.3),

ii) $c_1 = c_2$, pak k = 1 a transformace je translace.

Takže platí: *Jestliže* $\kappa /\!/ \pi$ *, pak výsledná transformace je buď stejnolehlost nebo translace, a to jsou transformace, které mají všechny směry jsou samodružné.*

II. Rovina κ ***je různoběžná s rovinou*** π

Z předchozího je jasné, že ke klasifikaci transformací stačí uvažovat f_1 a f_2 jako středová promítání. Uvedeme analytické vyjádření transformací, jeho odvození je obdobné jako v předchozí části.

Rovina κ má rovnici

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta\,.$$

Středová promítání f_1 a f_2 jsou dána středy $S_1 = [0,0,c_1]$ a $S_2 = [a_2,b_2,c_2]$, $S_i \notin \pi$, $S_i \notin \kappa$, $i = 1,2$.

Transformace má analytické vyjádření

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\big(c_2(c_1\gamma-\delta)+a_2c_1\alpha\big)x + a_2c_1\beta\, y - a_2c_1\delta}{(c_1-c_2)\alpha\, x + (c_1-c_2)\beta\, y + c_1(c_2\gamma-\delta)}\,, \\ y' &= \frac{b_2c_1\alpha\, x + \big(c_2(c_1\gamma-\delta)+b_2c_1\beta\big)y - b_2c_1\delta}{(c_1-c_2)\alpha\, x + (c_1-c_2)\beta\, y + c_1(c_2\gamma-\delta)}\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Rovnice (8) můžeme přepsat ve tvaru

$$x' = \frac{m_1x + m_2y + m_2}{p_1x + p_2y + p_3}\,, \quad y' = \frac{n_1x + n_2y + n_2}{p_1x + p_2y + p_3}\,, \tag{9}$$

a to je analytické vyjádření kolineace.

Je zřejmé, že kolineace přejde v afinitu, pokud přímka $S_1S_2 /\!/ \pi$, tedy $c_1 = c_2$. Jestliže navíc rovina κ má rovnici $y = \delta$ ($\alpha = \gamma = 0$, $\beta = 1$, $\delta \neq 0$) a bod $S_2 = [0, 2\delta, c_1]$ ($a_2 = 0$, $b_2 = 2\delta$) , pak rovnice (8) mají tvar

$$x' = x\,, \quad y' = -y + 2\delta\,. \tag{10}$$

Rovnice (10) představují analytické vyjádření osové souměrnosti.

Další podrobnou klasifikaci nebudeme provádět.

Je možné položit si ještě následující otázky:

Nechť kolineace je dána rovnicemi (9). *Jak zvolit rovinu* κ *a body* S_1 *a* S_2 *, aby kolineaci bylo možné vytvořit způsobem popsaným ve 2. odstavci?* (Viz poznámka 1.)

Všechny lineární transformace není možné vytvořit způsobem popsaným ve 2. odstavci. Takto nevytvoříme např. otáčení v rovině π nebo změnu měřítka na obou osách. To plyne ze skutečnosti, že tyto transformace nemají některé vlastnosti uvedené ve 4. odstavci. *Které další lineární transformace nelze vytvořit geometrickým způsobem? Jak tyto transformace vytvářet?*