

Dagmar Szarková

SKRUTKOVÁ OBALOVÁ PLOCHA VYTVORENÁ ROZVINUTEĽNOU PRIAMKOVOU PLOCHOU

Abstrakt

Skrutková obalová plocha vytvorená rozvinuteľnou priamkovou plochou je v príspevku graficky spracovaná v programovom systéme Maple pomocou siete skrutkovic bodov charakteristiky. Body charakteristiky sú hľadané pomocou spoločnej dotykovvej roviny tvoriacej plochy a plochy obalovej.

Kľúčové slová

Skrutková obalová plocha, rotačná obalová plocha, charakteristika, rozvinuteľná priamková plocha

1 Rozvinuteľná priamková plocha φ

Priamková plocha, ktorej všetky priamky sú torzálné, je rozvinuteľná. Rozvinuteľné priamkové plochy sú

- rovina
- valcová plocha
- kužeľová plocha
- plocha dotyčníc priestorovej čiary
- plochy zložené zo záplat typu a) - d)

V ďalšom sa budeme zaoberať iba plochami typu b) – d).

Modelujme plochu v kreatívnom priestore [1]. Rozvinuteľnú priamkovú plochu môžeme modelovať napríklad z riadiacej čiary c , danej analytickou reprezentáciou

$${}^1\mathbf{r}(u) = (x(u), y(u), z(u), 1) \quad \text{pre } u \in [0, 1], \quad (1)$$

na ktorú budeme aplikovať triedu transformácií.

Valcová a kužeľová plocha

Nech trieda transformácií je analyticky reprezentovaná štvorcovou maticou

$$\mathbf{T}(v) = \begin{pmatrix} q(v) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q(v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q(v) & 0 \\ v x_p & v y_p & v z_p & 1 \end{pmatrix} \quad \text{pre } v \in [0, 1]$$

a tvoriaca čiara $c(1)$ je regulárna triedy aspoň $C^{(1)}$.

Dagmar Szarková

Ak funkcia $q(v) = 1$ a trieda posunutí je určená vektorom $\mathbf{a} = (x_p, y_p, z_p, 0)$, vznikne valcová plocha so smerom tvoriacich priamok \mathbf{a} , resp. časť roviny.

Ak funkcia $q(v) = 1 - v$ a trieda rovnôhlostí je určená stredom v bode $V = (x_p, y_p, z_p, 1)$, získame kužeľovú plochu s vrchom V , resp. časť roviny.

Analytická reprezentácia časti valcovej, resp. kužeľovej plochy φ je bodová funkcia

$$\mathbf{p}(u, v) = (x(u), y(u), z(u), 1) \cdot \mathbf{T}(v) \quad \text{pre } (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]. \quad (2)$$

Plocha dotyčníc priestorovej čiary

Plochu dotyčníc priestorovej čiary získame, ak krivka $c(1)$ je regulárna triedy aspoň $C^{(2)}$ a trieda transformácií je analyticky reprezentovaná štvorcovou maticou

$$\mathbf{T}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ v a_1(u) & v a_2(u) & v a_3(u) & 1 \end{pmatrix} \quad \text{pre } (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$$

Trieda posunutí je určená vektorovou funkciou

$$\mathbf{a}(u) = (a_1(u), a_2(u), a_3(u), 0) = d \frac{{}^1\mathbf{r}'(u)}{|{}^1\mathbf{r}'(u)|},$$

kde d je nenulová konštanta z \mathbf{R} , ktorej hodnoty sú smerové vektory dotyčníc v bodoch čiary $c(1)$ pre hodnoty parametra $u \in [0, 1]$.

Analytická reprezentácia časti plochy dotyčníc priestorovej čiary je bodová funkcia

$$\mathbf{p}(u, v) = (x(u), y(u), z(u), 1) \cdot \mathbf{T}(u, v), \quad \text{pre } (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]. \quad (3)$$

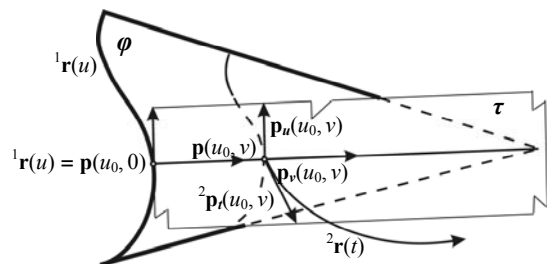
2 Obalová plocha

Obalová plocha Φ je obálka jednoparametrického systému plôch, ktoré vytvorí tvoriaca plocha φ spojitým pohybom. Ak plocha Φ existuje, môžeme ju získať tiež tým istým pohybom charakteristiky e (množiny spoločných bodov obalovej plochy Φ a tvoriacej plochy φ).

Pri hľadaní bodov charakteristiky využijeme vetu 1:

Veta 1: *Obalová plocha a jej tvoriaca plocha majú v každom bode charakteristiky spoločnú dotykovú rovinu a normálu.*

SKRUTKOVÁ OBALOVÁ PLOCHA ...



Obr. 1.

Nech trajektória pohybu ${}^2\mathbf{r}(t)$ tvoriacej plochy je popísaná maticou ${}^2\mathbf{T}(t)$. Dotyčnice trajektórií pohybu bodov $\mathbf{p}(u_0, v)$, $v \in [0, 1]$ jednej tvoriacej priamky tvoria jednoparametrický systém priamok. Vektorová funkcia, ktorej hodnoty sú smerové vektory týchto dotyčníc, má tvar

$${}^2\mathbf{p}_t(u_0, v) = \mathbf{p}_t(u_0, v) \cdot {}^2\mathbf{T}_t'(0) = (x_t(u_0, v), y_t(u_0, v), z_t(u_0, v), 0), \quad v \in [0, 1]$$

a pre parameter $u = u_0$ riadiacej čary c (1), teda bodu plochy ϕ (2) alebo (3), určuje časť roviny.

Dotyková rovina τ plochy ϕ (kužeľovej alebo valcovej plochy) v bodoch jednej tvoriacej priamky je určená bodom $\mathbf{p}(u_0, 0)$ riadiacej čary c , smerovým vektorom tejto tvoriacej priamky

$$\mathbf{p}_v(u_0, v) = (x_v(u_0, v), y_v(u_0, v), z_v(u_0, v), 0)$$

a smerovým vektorom dotyčnice tvoriacej čary c

$$\mathbf{p}_u(u_0, 0) = \mathbf{p}_u(u_0, v) = (x_u(u_0, v), y_u(u_0, v), z_u(u_0, v), 0).$$

Pretože dotyčnica ku trajektórii pohybu v bode charakteristiky $\mathbf{p}(u_0, v)$ musí ležať v dotykovej rovine τ (veta 1), stačí zistiť komplanárnosť smerových vektorov dotykovej roviny τ a dotyčnice ${}^2\mathbf{p}_t(u_0, v)$ trajektórie pohybu v bode $\mathbf{p}(u_0, v)$. Riešením rovnice s podmienkou

$$\begin{vmatrix} x_u(u_0, v) & y_u(u_0, v) & z_u(u_0, v) \\ x_v(u_0, v) & y_v(u_0, v) & z_v(u_0, v) \\ x_t(u_0, v) & y_t(u_0, v) & z_t(u_0, v) \end{vmatrix} = 0 \quad \wedge \quad v \in [0, 1],$$

získame hodnotu parametra v , ktorý určuje polohu hľadaného bodu M^i charakteristiky na tvoriacej priamke prechádzajúcej bodom $\mathbf{p}(u_0, 0)$ riadiacej čary c .

Ak tvoriaca plocha je plocha dotyčníc priestorovej čary, dotyková rovina bude určená bodom $\mathbf{p}(u_0, 0)$ riadiacej čary c a smerovými vektormi

Dagmar Szarková

$$\mathbf{p}_u(u_0, 0) = \mathbf{p}_u(u_0, v) = (x_u(u_0, v), y_u(u_0, v), z_u(u_0, v), 0),$$

$$\mathbf{p}_{uu}(u_0, 0) = \mathbf{p}_{uu}(u_0, v) = (x_{uu}(u_0, v), y_{uu}(u_0, v), z_{uu}(u_0, v), 0).$$

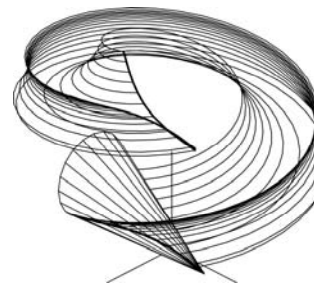
V takom prípade riešime rovnicu s podmienkou

$$\begin{vmatrix} x_u(u_0, v) & y_u(u_0, v) & z_u(u_0, v) \\ x_{uu}(u_0, v) & y_{uu}(u_0, v) & z_{uu}(u_0, v) \\ x_t(u_0, v) & y_t(u_0, v) & z_t(u_0, v) \end{vmatrix} = 0 \quad \wedge \quad v \in [0, 1].$$

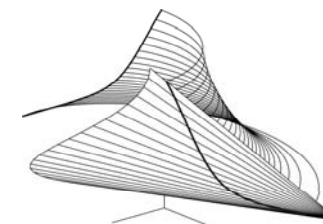
Skrutková a rotačná obalová plocha

Skrutková obalová plocha vznikne skrutkovým pohybom (tento pohyb je geometrická transformácia zložená z rotačného pohybu okolo osi o a posuvného pohybu v smere vektora \mathbf{z}_v) tvoriacej plochy ϕ . Rotačná obalová plocha je špeciálny prípad skrutkovej obalovej plochy s nulovou výškou závitú $|z_v|$ (\mathbf{z}_v je vektor posunutia odpovedajúci uhlu otočenia 2π).

Nech skrutková obalová plocha Φ je určená osou o , ktorá je umiestnená do súradnicovej osi z , redukovanou výškou závitú v_0 ($\mathbf{z}_v = (0, 0, 2\pi v_0, 0)$) a orientáciou pohybu.



Obr. 2.



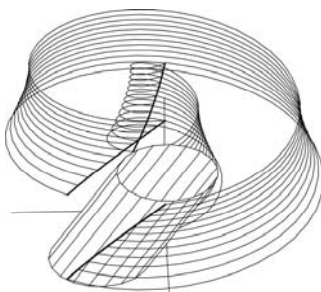
Obr. 3.

Obalovú plochu môžeme znázorniť pomocou siete skrutkovic (obr. 2-5) bodov $M^i(x_M^i, y_M^i, z_M^i, 1)$ charakteristiky e podrobených skrutkovému pohybu, ktorý je určený maticou ${}^2\mathbf{T}(t)$

$${}^2\mathbf{T}(t) = \begin{pmatrix} \cos \alpha t & \sin \alpha t & 0 & 0 \\ -\sin \alpha t & \cos \alpha t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha v_0 t & 1 \end{pmatrix} \quad \text{pre } t \in [0, 1],$$

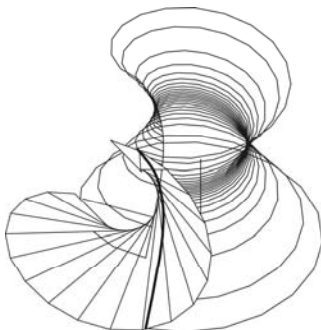
SKRUTKOVÁ OBALOVÁ PLOCHA ...

kde α je orientovaný uhol otočenia. Ak uhol $\alpha = 2\pi$, získame jeden závit skrutkovej obalovej plochy (viď obr. 2, 4, 5). Na obr. 3 je zobrazená polovica závitú skrutkovej obalovej plochy vytvorenej kužeľovou plochou, ktorej riadiaca čiara je Bèzierova kubika.



Obr. 4.

Na obr. 5 je zobrazená sieť skrutkovic skrutkovej obalovej plochy, ktorú vytvorila plocha dotyčnic skrutkovice.



Obr. 5.

Vzťahy pre výpočet sú síce komplikované, ale možnosti programového matematického systému Maple nám umožnia rýchle spracovanie. Všetky matematické operácie popísané vyššie dokáže systém vypočítať, graficky spracovať a animáciou, ktorá je súčasťou systému, získame obraz o tom, ako je obalová plocha vytváraná danou tvoriacou plochou. Hlavnou

Dagmar Szarková

výhodou spracovania danej problematiky počítačom je kreatívny prístup. Interaktívny dialóg s počítačom umožňuje konštruktérovi v krátkom čase realizovať návrh tvaru združených plôch ozubených kolies, či nástrojov pre obrábacie stroje podľa daných technických požiadaviek a parametrov.

Literatúra

- [1] Velichová, D.: *Konštrukčná geometria*, ES STU Bratislava, 2003
- [2] Velichová, D.: *Surface Patches Modelling and Computation of Geometric Properties*, Zeszyty naukowe politechniki ślaskiej Nr. 1453, Geometria i grafika inżynierska, z. 3, Gliwice 2000, Poland, PL ISSN 1427-9274, pp. 23 - 32
- [3] Voráčová, Š.: *Rozpad obalové šroubové plochy*, Sborník 22. konferencie Geometrie a počítačové grafiky, Dolní Lomná, 2002, str.149-154

Dagmar Szarková, E-mail: szarkova@sjf.stuba.sk